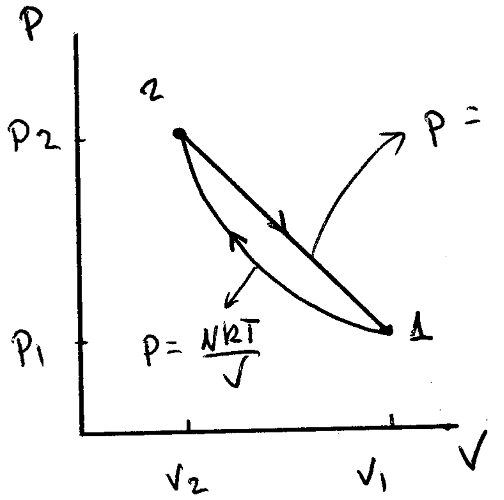
Un gas ideal ($pV = NkT, U = \frac{3}{2}NkT$) experimenta un cicle format del següents pasos que es realitzen quasi-estàticament: (a) Compressió isoterma des de la condició inicial (p_1, V_1, T) fins a la final (p_2, V_2, T). (b) Expansió fins al punt inicial seguint una trajectòria recta al diagrama (p, V).
(i) Per a cada un dels dos fragments del cicle calculeu el treball realitzat, la calor intercanviada i el canvi d'energia interna. Calculeu el treball total W del cicle.
(ii) Identifiqueu aquella part del cicle en que calor, Q_H, és cedida al sistema i aquella en que calor, Q_C, hi surt del sistema. Relacioneu W, Q_C, Q_H, calculeu el rendiment del cicle $\eta = \frac{|W|}{|Q_H|}$.
(iii) Trobeu el punt a la part b del cicle on s'assoleix la màxima temperatura $T_{\max}$ i calculeu el rendiment d'un cicle de Carnot operant entre $T_{\max}$ i T. Preneu $V_1 = 2V_2$ i compareu aquest rendiment amb l'obtingut a l'apartat (ii).



$$p = P_2 + \frac{P_1 - P_2}{V_1 - V_2}(V - V_2) \qquad T_1 = T_2 = T$$

$$p = \frac{NkT(V)}{V}, \quad P_1 = \frac{NkT}{V_1}, \quad P_2 = \frac{NkT}{V_2}$$

$$T(V) = \frac{T \cdot V\,(V_1 + V_2 - V)}{V_1 \cdot V_2}$$

$$\frac{dT(V)}{dV} = \frac{T}{V_1 V_2}\left(V_1 + V_2 - 2V\right)\Big|_{max} = 0$$

$$V_{max} = \frac{V_1 + V_2}{V}, \quad T(V_{max}) = T\,\frac{(V_1+V_2)^2}{4V_1V_2}$$

i) $$W_{1\to2} = \int_1^2 p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{NkT}{V}\,dV = NkT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0$$

$\Delta U = 0 \quad (T_1 = T_2) \quad \Rightarrow \quad Q = W_{12} = NkT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) < 0 \Rightarrow |Q| = |Q_C|$

2) $$W_{2\to1} = \int_2^1 p\,dV = \int_{V_2}^{V_1}\left[P_2 + \frac{P_1 - P_2}{V_1 - V_2}(V - V_2)\right]dV$$

$$= \frac{P_1 + P_2}{2}(V_1 - V_2) > 0$$

$\Delta U = 0 \quad (T_1 = T_2) \qquad Q = W_{12} = \frac{NkT}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)(V_1 - V_2) > 0$

$|Q| = |Q_H|$

$$W = W_{12} + W_{21} = NkT\left[\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)(V_1 - V_2)}_{\left(\frac{V_1}{V_2} - \frac{V_2}{V_1}\right)} + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right] > 0$$

$$x = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_h|} = \frac{\ln x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} = 1 - 2 \frac{\ln x}{x - 1/x}$$

$$x = \frac{V_2}{2V_2} = 0.5 \qquad \eta = 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln 1/2}{\frac{1}{2} - 2} = 0.076$$

$$T_{max} = T \frac{(3V_2)^2}{4 \cdot 2V_2^2} = \frac{9}{8} T$$

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T}{T_{max}} = 1 - \frac{8}{9} = 0.111$$

$$\underline{\eta < \eta_{carnot}}$$