# Termodinámica, curso 2015-16

## Tema 1

1. En un salto de pértiga, la energía cinética del atleta se convierte en potencial (pasando primero por la energía potencial elástica de la pértiga). Si el corredor alcanza $10\,\text{m/s}$ y despreciamos la energía adicional que se pueda conseguir mediante la flexión de los brazos sobre la pértiga, ¿cuál es la máxima altura que se puede conseguir? ¿A qué velocidad debe ir el atleta para conseguir escapar de la Tierra?

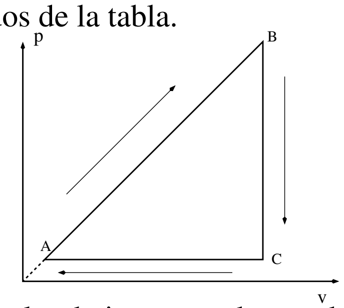
2. En un punto de la costa, la diferencia de alturas entre la pleamar y la bajamar es de $8.5\,\text{m}$. Una represa encierra el agua en la pleamar y la descarga, horas después, durante la bajamar para accionar unas turbinas que generan energía eléctrica. Si el área de la represa es $23\,\text{km}^2$, ¿cuánto trabajo realiza el agua al caer suponiendo que las energías cinéticas iniciales y finales sean despreciables?

3. Las aspas de un molino de viento de una central eólica barren un círculo de área $A$. (a) Si el viento tiene una velocidad $v$ perpendicular a dicho círculo, ¿cual es la masa de aire que pasa a través suyo en un tiempo $t$? (b) ¿Cuál es la energía cinética de dicho aire? (c) Si la máquina convierte el $30\%$ de la energía eólica en energía eléctrica y $A = 30\,\text{m}^2$ y $v = 10\,\text{m/s}$, ¿cuál es la potencia eléctrica producida? (La densidad del aire a $20^o\,\text{C}$ es $1.2\,\text{kg/m}^3$.)

4. Un mol de gas ideal monoatómico a una presión de $10\,\text{atm}$ se encuentra delimitado por un recinto de paredes diatérmicas en equilibrio con una fuente térmica a una temperatura de $300\,\text{K}$. El recinto dispone de un émbolo móvil y adiabático (inicialmente fijado) sometido en todo momento a una presión de $1\,\text{atm}$. Se libera el émbolo de forma que éste llega a una situación de equilibrio mecánico. Determine el trabajo realizado por el gas.

5. Un mol de una gas ideal a una temperatura constante de $300\,\text{K}$ se expande desde una presión $p_i = 10\,\text{bar}$ a una presión final $p_f = 1\,\text{bar}$. La expansión se realiza en $n$ etapas de manera que en cada etapa la presión externa, que se mantiene constante, disminuye en una cantidad $\Delta p = \frac{p_f - p_i}{N}$. Calcula y compara el trabajo realizado por el gas en función del número de etapas $N$ y discute el límite $N \to \infty$.

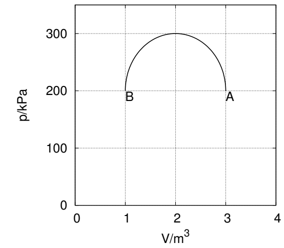
6. Un gas ideal evoluciona de forma reversible según el ciclo de la figura. (a) Rellene los valores desconocidos de la tabla.




| Vértice | p/(N/m$^2$) | V/m$^3$ | T/K |
|---|---|---|---|
| A | $2\ 10^5$ | 3 | 100 |
| B | $4\ 10^5$ | | |
| C | $2\ 10^5$ | | |

(b) Calcule el trabajo para cada una de los procesos que componen el ciclo.

7. Calcular el trabajo realizado por un mol de gas ideal desde el punto $A$ hasta el punto $B$ de forma cuasiestática a lo largo del ciclo semicircular de la figura




8. Un cierto gas en el estado inicial (50 bar, $2\,\ell$) alcanza de forma reversible el estado final (8 bar, $5\,\ell$) mediante dos procesos distintos. El primer proceso cumple la ecuación $p = a + bV$ y el segundo $p = c/V^2$, donde $a, b$ y $c$ son constantes. Calcule: (a) las constantes $a, b$ y $c$, (b) el trabajo en cada uno de los procesos.

9. Demostrar que la ecuación de van der Waals $\left(p + \frac{\mathbf{n}^2 a}{V^2}\right)(V - \mathbf{n}b) = \mathbf{n}RT$, donde $\mathbf{n}$ es el número de moles, trata de manera consistente las variables extensivas y las intensivas. Escribirla en la forma $\left(p + \tilde{a}v^2\right)(v - \tilde{b}) = kT$ siendo $v = V/N$ y encontrar la relación entre $(a, b, R)$ y $(\tilde{a}, \tilde{b}, k)$.

10. 70 g de $NH_3$(g) a $100^o$C evolucionan reversible e isotérmicamente desde un volumen de $90\,\ell$ hasta un volumen de $20\,\ell$. Calcule el trabajo de este proceso suponiendo que el gas obedece la ecuación de Van der Waals ($a = 4.170$ atm·$\ell^2$/mol$^2$ y $b = 0.03713\,\ell$/mol).

11. Calcular el trabajo realizado por un mol de gas que se expande isoterma y cuasiestáticamente desde un volumen inicial $V_i$ a un volumen final $V_f$ si el gas obedece la ecuación de van der Waals. Comparar los resultados para 2 g de hidrógeno $H_2$ cuando se expande de $10\,\ell$ a $20\,\ell$ a una temperatura de $30^o$C suponiendo la ecuación de van der Waals ($a = 0.2421$ atm·$\ell^2$/mol$^2$, $b = 0.02651\ell$/mol, o la ecuación de los gases ideales.

12. Calcular el trabajo realizado por un mol de gas en una expansión isoterma cuasiestática desde un volumen específico inicial $v_i$ hasta un volumen específico final $v_f$: (a) usando la ecuación de estado de un gas de esferas duras $p(v - b) = kT$ y (b) usando el desarrollo el Virial a primer orden $pv = kT\left[1 - \frac{B(T)}{v}\right]$.

13. Tenemos un sistema aislado dividido en dos por un pistón adiabático que puede moverse sin rozamiento. En la parte izquierda hay un gas ideal a temperatura $T_i$ y en la derecha hay dos muelles en vacío. Los dos muelles son idénticos con constante recuperadora independiente de la temperatura y longitud natural $L$ (que coincide con la longitud del sistema), e inicialmente comprimidos de manera que el pistón está quieto. Se rompe uno de los dos muelles de la derecha, alcanzándose un nuevo estado de equilibrio. Calcule el trabajo realizado por el gas como función de las temperaturas del estado inicial $T_i$ y final $T_f$.

14. El radio de una pompa de jabón esférica de tensión superficial $\sigma = 5\;10^{-2}$ N/m a la temperatura $T = 300$ K aumenta reversible e isotérmicamente desde $0.05$ m hasta $0.1$ m. ¿Cuál es el trabajo realizado por el sistema sabiendo que la presión inicial es de 1 bar? (Suponga que la tensión superficial depende sólo de la temperatura y que el gas contenido en la pompa es ideal).

15. Una burbuja esférica de radio $r = 1$ mm se halla situada en el fondo de un recipiente que contiene agua a la temperatura constante de $20^o$C. La presión del aire en el interior de la burbuja

a esta profundidad es de $350\,\text{kPa}$. Cuando la burbuja asciende hasta las proximidades de la superficie su radio se hace $1.5$ veces mayor que el inicial. Considerando que el aire se comparta idealmente, que la burbuja permanece siempre esférica y que el proceso es cuasiestático e isotermo, calcule: (a) el trabajo de expansión realizado por el aire, (b) el trabajo de expansión realizado por la película superficial de agua que forma la burbuja (la tensión superficial a $20^0$C es $\sigma = 72.75\ 10^{-3}$ N/m) y (c) el trabajo de expansión realizado por la burbuja.

16. S, S' y S" son tres sistemas termodinámicos de coordenadas $(p, V)$, $(p', V')$ y $(p'', V'')$ respectivamente. Cuando S y S" están en equilibrio térmico se verifica $pV - pB - p''V'' = 0$, mientras que si lo están S' y S" es $p'V' - p''V'' + p''\frac{B'V''}{V'} = 0$, siendo $B$ y $B'$ constantes. Determine: (a) las tres magnitudes que se igualan en el equilibrio térmico y (b) la relación de equilibrio térmico entre S y S'.

17. Un termómetro de mercurio, graduado linealmente, es sumergido en hielo fundente; el mercurio queda enrasado en la división $n = -2$. En vapor de agua hirviente, a la presión de $76\,\text{cm}$ de mercurio, queda enrasado en la división $n = 103$. (a) En un baño tibio, el mercurio alcanza la división $n = 40$. Determine la temperatura $\theta$ del baño indicado por este termómetro. (b) De manera más general, determine la corrección a efectuar sobre la lectura de la división $\theta - n$ en la forma $\theta - n = f(n)$. Deducir la temperatura $\theta$ para la que no es necesaria ninguna corrección.

18. Un termómetro de gas a volumen constante ($V = 10^{-3}\ \text{m}^3$) contiene $0.05$ moles de un gas que verifica la ecuación de estado de van der Waals. ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo cometidos al usarlo como termómetro y medir $100^o$C si se supone que es un gas ideal? ($a = 34.4 \times 10^{-5}$ atm m$^6$/mol$^2$, $b = 2.34 \times 10^{-3}$ m$^3$/mol).

19. La presión de un gas ideal a volumen constante viene dada por $p = A\theta$, donde $\theta$ es la temperatura empírica y $A$ una constante. Sea $\theta'$ una temperatura definida por $\theta' = B\ln(D\theta)$, donde $B$ y $D$ son constantes. La presión $p$ es de $0.1$ atm en el punto triple del agua. La temperatura $\theta'$ es de $0$ grados en el punto triple y $100$ grados en el punto de vapor. Determine: (a) los valores de $A,\ B$ y $D$, (b) el valor de $\theta'$ cuando $p = 0.15$ atm, (c) el valor de $p$ cuando $\theta' = 50$ grados y (d) el valor de $\theta'$ en el cero absoluto.

20. La ecuación termométrica de un termómetro de resistencia de platino es, entre $0^o$C y $630^o$C, de la forma $R = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$, donde $R$ designa la resistencia del hilo de platino a la temperatura Celsius $t$, siendo el resto de magnitudes constantes ($A_0 = 2\,\Omega$, $A_1 = 8.12\ 10^{-3}\Omega^o\text{C}^{-1}$ y $A_2 = -1.2\ 10^{-6}\Omega^o\text{C}^{-2}$. (a) Exprese la diferencia $\theta - t$ entre la temperatura centesimal lineal $\theta = 100\frac{R-R_0}{R_{100}-R_0}$ y la temperatura Celsius $t$ en función de esta última. (Aplicación numérica: $t = 80^o$C) (b) Determine la temperatura $t_1$ que maximiza la diferencia $\theta - t$ y evalúe dicha diferencia máxima.

21. Se considera un termómetro de mercurio cuyo vástago troncocónico lleva graduaciones regularmente espaciadas. En la división $n = 0$, el vástago tiene diámetro $d_0 = 0.4$mm y, en la división $n = 100$, tiene $d_{100} = 0.51$mm. Calcular la corrección $\theta - n = f(n)$ a efectuar en la lectura de la graduación $n$ cuando el termómetro está sumergido en un baño de temperatura $\theta$. (Aplicación numérica: $\theta$ para $n = 30$) (El volumen de un tronco de cono de revolución de altura $h$ y diámetros $d$ y $D$ es $\frac{\pi h}{12}(D^2 + d^2 + dD)$.

22. A partir de la teoría atómica y suponiendo que la presión de un gas es debido a los innumerables choques de las moléculas del gas con el recipiente, deducir la ley del gas ideal $pV = NkT$. Relacionar la temperatura con la energía cinética media de las moléculas.

23. Calcular la velocidad cuadrática media de una molécula de nitrógeno $N_2$ a una temperatura $T$. ¿Para qué valor aproximado de $T$ es esperable que desaparezca la atmósfera terrestre? ($m_{N_2} = 14u$, $R_T = 6.4\ 10^6 m$, $M_T = 6\ 10^{24} kg$)

24. Un sistema, aislado del exterior, está compuesto por dos partes separadas por una pared aislante. Una de las partes, de volumen $2\ 10^-3m^3$ contiene He a temperatura $300K$ y presión $10^6 Pa$. La otra partes tiene volumen $10^{-3}m^3$ y contiene Ar a temperatura $400K$ y presión $1.5\ 10^6 Pa$. Calcular la temperatura y presión tras eliminar la pared, una vez la mezcla haya alcanzado el equilibrio termodinámico.

25. Considerando que el aire es un gas perfecto, que la aceleración de la gravedad $g$ es constante a las alturas consideradas y que la temperatura de la atmósfera es uniforme (algo ciertamente mejorable), establecer las leyes de variación de la densidad molecular $n$ y de la presión $p$ en función de la altitud $z$. ¿A qué altitud es la presión la mitad que en el suelo?

26. Demostrar que para que una función $f(N, V, T)$ sea intensiva, $f(N, V, T) = f(\lambda N, \lambda V, T)$ se debe verificar la forma funcional sea $f(N, V, T) = \phi(N/V, T)$. Así mismo, si una función $F(N, V, T)$ ha de ser extensiva, el requerimiento $F(\lambda N, \lambda V, T) = \lambda F(N, V, T)$ requiere que la forma funcional sea $F(N, V, T) = N\phi(N/V, T)$.

27. Discutir cuándo es exacta la forma diferencial $d\omega = aydx + bxdy$. Cuando no lo sea, buscar factores integrantes de la forma $x^\alpha y^\beta$.

28. Dada la ecuación de estado de una sustancia magnética $M = CH/T$, donde $M$ es la magnetización, $H$ el campo magnético, $T$ la temperatura y $C$ la constante de Curie, determine la diferencial total $dT$ en función de $dH$ y $dM$. Partiendo de la expresión obtenida para $dT$ compruébese que se trata de una diferencial exacta.

29. En un fluido de masa constante el volumen es función de la presión y la temperatura, $V(p, T)$. Se definen los coeficientes de dilatación isobara $\alpha$ y de compresibilidad isoterma $\chi$ como $\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$, $\quad \alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Demuéstrese que $\left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T$.

30. Si definimos ahora el coeficiente piezotérmico a presión constante $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, demostrar que la relación cíclica lleva a $\alpha = p\chi\beta$ o, equivalentemente, $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\chi}$.

31. Dada la función $z(x, y) = \arctan(x/y)$ con $x, y > 0$ verificar la relación cíclica.

32. Sea una sistema de masa constante con ecuación de estado $p = p(V, T)$. Sea $U(V, T)$ una función arbitraria de $V$ y $T$. Definimos: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ y $C_p = \left(\frac{\partial (U + pV)}{\partial T}\right)_p$. Demostrar la relación:

$$C_p - C_V = -\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$

En el caso de la ecuación del gas ideal $p = \frac{NkT}{V}$ se llega a $\frac{C_p - C_V}{Nk} = 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$. Si, además, $U(V, T) = U(T)$ entonces $C_p - C_V = Nk$, la conocida como ley de Mayer.