Juny 2011

Teoria, #1

(a) • Veure exercici #26 dels fets a classe de problemes.

$$\langle \psi_1 | \partial_x \psi_2 \rangle = \langle (\partial_x)^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$ ← definició d'adjunt

Així tenim que:

$$\langle \psi_1 | \partial_x \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \, \partial_x \psi_2 \, dx$$

$$\langle (\partial_x)^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger \psi_1 \right]^* \psi_2 \, dx$$

per tant

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \, \partial_x \psi_2 \, dx}_{} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger \psi_1 \right]^* \psi_2 \, dx}_{}$$

integrem per parts $\int u \, dv = uv - \int du \, v$

$u = \psi_1^* \rightarrow du = \partial_x \psi_1^*$ $\quad dv = \partial_x \psi_2 \, dx \rightarrow \psi_2 = v$

$$\overbrace{\cancel{\psi_1^* \psi_2^* \Big|_{-\infty}^{\infty}}}^{} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^* \psi_2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger \psi_1 \right]^* \psi_2 \, dx$$

0

pq assumim que ψ_1 i ψ_2 són zero quan $x \to \pm\infty$. Sinó no podien estar normalitzades.

D'aquí no costa molt identificar

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}}$$

(b) Sabem que

$$\hat{P}_x = -i\hbar \, \partial_x \longleftarrow \hat{\vec{P}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

Clarament al comparar es veu que $\hat{P}_x^\dagger = \hat{P}_x$ i per tant $\hat{P}_x$ és autoadjunt

llavors

$$\langle \psi_1 | \hat{P}_x \psi_2 \rangle = \langle \hat{P}_x^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

propietats prod. escalar; emprant (a)

$$\langle \psi_1 | \hat{P}_x \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | -i\hbar \, \partial_x \psi_2 \rangle \overset{\downarrow}{=} \langle +i\hbar (\partial_x)^\dagger \psi_1 | \psi_2 \rangle \overset{\downarrow}{=} \langle -i\hbar \, \partial_x \psi_1 | \psi_2 \rangle$$

T 2,5,6,4

Teoria #2 Vegeu apunts teoria.

Teoria#5 Correspon a l'exercici #81 dels problemes fets a classe.

Teoria#6 Vegeu apunts teoria.

Teoria #4 Ens podem adonar que $\vec{J_1}, \vec{J_2}, \vec{J_3}$ són o verifiquen les propietats dels moments angulars.

(a) $$[J_3, J^2] = [J_3, J_1^2 + J_2^2 + J_3^2] =$$

$$= [J_3, J_1^2] + [J_3, J_2^2]$$

$$= J_1[J_3, J_1] + [J_3, J_1]J_1 + J_2[J_3, J_2] + [J_3, J_2]J_2$$

$$= J_1(iJ_2) + (iJ_2)J_1 + J_2(-iJ_1) + (-iJ_1)J_2 = 0$$

s'anul·len entre sí

(b) $$[J_\pm, J^2] = [J_1 \pm iJ_2, J^2] = [J_1, J^2] \pm [iJ_2, J^2] = 0$$

fent servir un raonament similar al de l'apartat (a) per cada un dels 2 commutadors que ara tenim

Ara volem provar que $J_\mp J_\pm = J^2 - J_3^2 \mp J_3$ fem doncs:

$$J_\mp J_\pm = (J_1 \mp iJ_2)(J_1 \pm iJ_2) = J_1^2 \pm iJ_1J_2 \mp iJ_2J_1 - (i)^2 J_2^2$$

$$= \underbrace{J_1^2 + J_2^2}_{J^2 - J_3^2} \pm i\underbrace{[J_1, J_2]}_{iJ_3} \overset{(i)^2=-1}{=} J^2 - J_3^2 \mp J_3 \quad \text{ok}$$

sabem que val (ens ho diuen a l'enunciat)

Juny 2011 T4 cont

Continuació Teoria #4

(c) i (d) | Recomanable: repasar el capítol dedicat al Moment angular en el Gasiorowicz.

- Ens diuen que: $\begin{cases} J^2 \, |jm\rangle = j(j+1)\, |jm\rangle \\ J_3 \, |jm\rangle = m \, |jm\rangle \end{cases}$

- Per provar que $j(j+1) \geq m^2$ fasem servir el vist en els apartats anteriors

$$[J^2, J_\pm] = 0 \Longrightarrow J^2 J_\pm \, |jm\rangle = J_\pm J^2 \, |jm\rangle = j(j+1) \, J_\pm \, |jm\rangle$$

que implica que $J_\pm |jm\rangle$ són tb funcions pròpies de J^2 amb #quàntic associat "j"

Hom pot provar tb que:

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \Longrightarrow J_3 J_\pm \, |jm\rangle = (J_\pm J_3 \pm J_\pm) \, |jm\rangle =$$

$$= m \, J_\pm \, |jm\rangle \pm J_\pm \, |jm\rangle$$

$$= (m \pm 1) \, J_\pm \, |jm\rangle$$

Així darrer prova que $J_\pm |jm\rangle$ són tb. func. pròpies de J_3 però amb el valor de m apujat/abaixat en una unitat. D'aquí que $J_\pm$ rebin els noms d'operador d'apujada/d'abaixada

Demo: $[J_3, J_\pm] = [J_3, J_1 \pm i J_2] =$

$= [J_3, J_1] \pm i [J_3, J_2] =$ de l'enunciat sabem quan valen dits commutadors

$= i J_2 \pm i(-1) i J_1 = i J_2 \pm J_1 = \pm J_\pm$

Ara podem continuar recordant que J_1 i J_2 són hermètics i per tant $(J_\pm)^\dagger = (J_1 \pm i J_2)^\dagger = J_1 \mp i J_2 = J_\mp$

⇓ continua

Com que $J_\pm |jm\rangle = c\ |jm\rangle$
$\underset{\overset{\cap}{\mathbb{C}}}{}$ ← de fet veurem que $\in \mathbb{R}$

llavors

[*] $\langle jm| J_\pm^\dagger J_\pm |jm\rangle = |c|^2 \overbrace{\langle jm|jm\rangle}^{1} \geq 0$

$\langle jm| \to c^* \langle jm|$, $|jm\rangle \to c|jm\rangle$

i per tant, recordant que $(J_\pm)^\dagger = J_\mp$ obtenim que

$$\langle jm | J_\mp J_\pm | jm\rangle \geq 0 .$$

Per altra banda havíem provat en apartats anteriors

[▲] que $J^2 = J_\pm J_\mp + J_3^2 \mp J_3$ així idò:

$$\langle jm | J^2 - J_3^2 \pm J_3 | jm\rangle \geq 0$$

i aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} j(j+1) \geq m^2 + m \\ j(j+1) \geq m^2 - m \end{array}\right] \text{ aquestes desigualtats impliquen que } j(j+1) \geq m^2$$

segur (prenim valors de $m > 0$ i < 0 i emprant la corresponent desigualtat)

Per un raonament semblant a [*] tenim que

$$\langle jm | J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 | jm\rangle = \underbrace{\langle jm | J_1^2 | jm\rangle}_{[*] \geq 0} + \underbrace{\langle jm | J_2^2 | jm\rangle}_{[*] \geq 0} + m^2 \geq 0$$

i per tant $m \in [-j, j]$ així

Si $\exists\, m_{min} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} J_- |j m_{min}\rangle = 0 \\ \text{recordant } [▲] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{j(j+1) = m_{min}^2 - m_{min}}$

$\Downarrow m \in [-j, j]$

$\boxed{m_{min} = -j}$

Si $\exists\, m_{max} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} J_+ |j m_{max}\rangle = 0 \\ \text{recordant } [▲] \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{j(j+1) = m_{max}^2 + m_{max}}$

$\Downarrow m \in [-j, j]$

$\boxed{m_{max} = j}$

Juny 2011

Teoria #3

Àtom hidrogenoide

$t=0 \rightarrow \psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\psi_{100\frac{1}{2}} - 3\psi_{200-\frac{1}{2}} + \psi_{320\frac{1}{2}}\right]$

Spi m_z

(a) • No és pròpia de $\hat{H}$ ja que tenim mescla de $n=1, n=2, n=3$

• No és pròpia de $\hat{L}^2$ ja que tenim mescla de $l=0$ i $l=2$.

• SI És pròpia de $\hat{L}_z$ ja que tenim que tots ~~tenen~~ tenen $m=0$.

Comprovació: ψ serà una funció pròpia de $\hat{H}$ si $\hat{H}\psi = E_n\psi$

$\hat{L}^2$ si $\hat{L}^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi$

$\hat{L}_z$ si $\hat{L}_z\psi = m\hbar\psi$

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\hat{H}\psi_{100\frac{1}{2}} - 3\hat{H}\psi_{200-\frac{1}{2}} + \hat{H}\psi_{320\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2E_1\psi_{100\frac{1}{2}} - 3E_2\psi_{200-\frac{1}{2}} + E_3\psi_{320\frac{1}{2}}\right] \neq \text{cte}\cdot\psi$$

$$\hat{L}^2\psi = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\hat{L}^2\psi_{100\frac{1}{2}} - 3\hat{L}^2\psi_{200-\frac{1}{2}} + \hat{L}^2\psi_{320\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\cdot 0(0+1)\psi_{100\frac{1}{2}} - 3\cdot 0(0+1)\psi_{200-\frac{1}{2}} + 2(2+1)\psi_{320\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}\,6\psi_{320\frac{1}{2}} \neq \text{cte}\cdot\psi$$

$$\hat{L}_z\psi = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\hat{L}_z\psi_{100\frac{1}{2}} - 3\hat{L}_z\psi_{200-\frac{1}{2}} + \hat{L}_z\psi_{320\frac{1}{2}}\right] = 0\,\psi$$

(b) $\text{Prob}(E_2) = \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{9}{14}$

$\text{Prob}(E_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{1}{14}$

$\text{Prob.}(E_1) = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{4}{14}$

Suma: 1 ok.

$\text{Probab.}\left(\frac{1}{2}(E_1+E_3)\right) = 0$

Quan faci una mesura, puc trobar

	Probab
$E_1 \rightarrow$	$4/14$
$E_2 \rightarrow$	$9/14$
$E_3 \rightarrow$	$1/14$

$\frac{E_1+E_3}{2}$ no coincideix amb cap valor dels anteriors i per tant al fer una mesura no puc trobar dit valor.

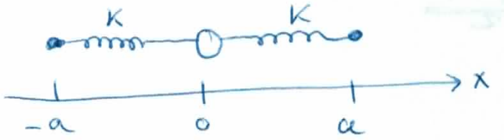
(c) Per a $t>0$

~~$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r},t=0)\, e^{i}$~~

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\,\psi_{100\frac{1}{2}}(\vec{r})\, e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}} - 3\,\psi_{200-\frac{1}{2}}(\vec{r})\, e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}} + \psi_{320\frac{1}{2}}(\vec{r})\, e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}\right]$$

Juny 2011

Problemes, #1



long. natural molles = a.

$$V(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} K (x-0)^2$$

$$\boxed{V(x) = K x^2}$$

(a) Com en els exercicis fets a classe de problemes i de teoria, però ara en lloc de tenir $\frac{1}{2} K x^2$ tenim $K x^2$

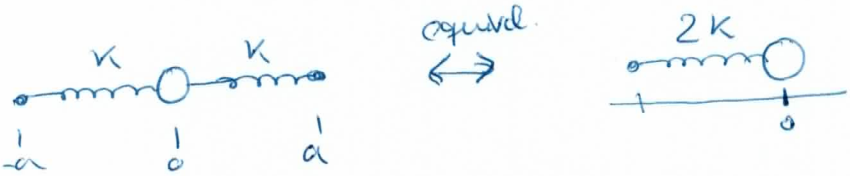
Emprant la info que ens donen en mateix enunciat

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = K x^2 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

Per tant $\alpha = \sqrt{\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}}$

i $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{\frac{2K}{m}}$

L'únic canvi respecte a un oscil·lador harmònic amb una molla, és que en el de dos molles que tenim, la cte efectiva de la molla és $2K$.



(b) En l'estat fonamental, prenint la info que ens donen en l'enunciat com a punt de partida.

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}} \; H_n\left(x \cdot \sqrt{\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}}\right) e^{-\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}\frac{x^2}{2}}$$

per l'estat fonamental valem $\phi_0(x)$ és dir

$$\phi_0(x) = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 1}} \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}} \; \overset{1}{H_0(x)} \; e^{-\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}\frac{x^2}{2}}$$

recordant el que val $\alpha = \sqrt{\frac{m}{\hbar}\sqrt{\frac{2K}{m}}}$

$$\phi_0(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$$

(c) Quan tallem una de les molles la cte $2K \xrightarrow{\text{passa}} K$ i per tant obtenim $\psi_0^{(1\ \text{molla})} = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi^{1/4}} e^{-\beta^2 x^2/2}$ on $\beta \equiv \left(\frac{m K}{\hbar^2}\right)^{1/4}$

llavors si en $t<0$ es troba en ϕ_0, i a $t=0$ tallem una molla, la Prob de trobar el sistema en ψ_0 és ve donat per $|\langle \phi_0 | \psi_0 \rangle|^2$

Facem ...

$$\langle \phi_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \phi_0^*(x) \; \psi_0(x)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-x^2\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}}$$

llavors

$$P = |\langle \phi_0 | \psi_0 \rangle|^2 = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{2^{5/4}}{1+\sqrt{2}} = 0'985$$

emprem que $\beta = \frac{\alpha}{2^{1/4}}$

Juny 2011 P2

Problemes, #2

- 3D, potencial central $V(r)$

$$\psi(\vec{r}) = \underbrace{C\, r^b e^{-\alpha r}}_{\text{part radial}} \underbrace{\cos(\theta)}_{\text{part angular}} \quad \text{on } b > 1$$

(a) Sabem (hom ho pot trobar en el #4) que

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta) \xrightarrow{\text{llavors}} \cos(\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^0$$

Per tant

$$\psi(\vec{r}) = C\, r^b e^{-\alpha r} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^0(\theta, \varphi)$$

i per tant

La funció $\psi(\vec{r})$ és pròpia de L^2 amb $l=1$, és dir, amb valor propi $l(l+1)\hbar^2 = 1(1+1)\hbar = 2\hbar$. De fet. tb serà funció pròpia de $\hat{L}_z$ amb $m=0$.

(b) Sabem que $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\vec{r})$ i que $\hat{H}\psi = E\psi$

En coordenades esfèriques $\nabla^2 = \underbrace{\Delta_r}_{\text{part radial}} + \underbrace{\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta\varphi}}_{\text{part angular}}$

Sabem que $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta\varphi}$ i per tant

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2\hbar^2}\psi \underset{\text{aplicant que } \hat{L}^2\psi = 2\hbar^2\psi}{=} \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r \psi\right) - \frac{2}{r^2}\psi$$

llavors $\psi = C \cdot r^b e^{-\alpha r} \cos\theta$

$$\partial_r \psi = C\cdot\cos(\theta)\left(b\, r^{b-1} e^{-\alpha r} - \alpha\, r^b e^{-\alpha r}\right)$$

$$r^2 \partial_r \psi = C\cdot\cos(\theta)\left(b\, r^{b+1} e^{-\alpha r} - \alpha\, r^{b+2} e^{-\alpha r}\right)$$

$$\partial_r(r^2\partial_r\psi) = C\cdot\cos(\theta)\left[b(b+1) r^b e^{-\alpha r} - \alpha b r^{b+1} e^{-\alpha r} - \alpha(b+2) r^{b+1} e^{-\alpha r} + \alpha^2 r^{b+2} e^{-\alpha r}\right]$$

$$= C\cdot\cos(\theta) e^{-\alpha r}\left[b(b+1) r^b - 2\alpha(b+1) r^{b+1} + \alpha^2 r^{b+2}\right]$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\psi) = \underbrace{C\cdot\cos(\theta) e^{-\alpha r}\cdot r^b}_{= \psi}\left(\frac{b(b+1)}{r^2} - \frac{2\alpha(b+1)}{r} + \alpha^2\right)$$

Així doncs

$$\hat{H}\psi = \left[\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{b(b+1)}{r^2} - \frac{2\alpha(b+1)}{r} + \alpha^2 - \frac{2}{r^2}\right) + \hat{V}(r)\right]\psi$$

Sabem que quan $r \to \infty$ llavors $V(r) = 0$

Sabem que $\hat{H}\psi = E\psi$ s'ha de verificar $\forall r$, per tant

$$E = \frac{-\hbar^2}{2m}\alpha^2$$ $\leftarrow$ basta recordar $\frac{1}{r^2} \to 0$ $\frac{1}{r} \to 0$ quan $r \to \infty$

Ara per trobar $\hat{V}(r)$ basta recordar que $\hat{H}\psi = (\hat{T} + \hat{V})\psi = E\psi$

llavors $\hat{V}\psi = (E - \hat{T})\psi$ i per tant $\hat{V} = E - \hat{T}$

Emprant l'expressió a l'inici de la pàgina veim que

$$\hat{V}(r) = \frac{-\hbar^2}{2m}\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{b(b+1)}{r^2} - \frac{2\alpha(b+1)}{r} + \alpha^2 - \frac{2}{r^2}\right]$$

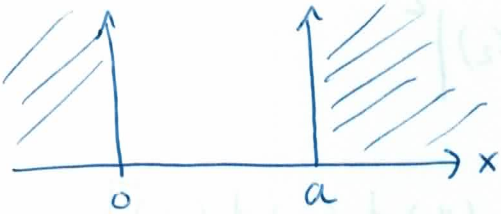
i per tant

$$\hat{V}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(b+1)b-2}{r^2} - \frac{2\alpha(b+1)}{r}\right]$$

Així el potencial tendrà un potencial de tipus Coulombià ($\sim 1/r$) i un repulsiu ($\sim 1/r^2$) ja que $b > 1$ implica que $(b+1)b - 2 > 0$ segur.

Juny 2011

Problemes, #3



2 partícules $\rightarrow$ mateix estat de spi

L'spin el denotem per χ (la funció d'ona associada)

f.o. d'una partícula $\rightarrow$ $\phi_n(x) = \sqrt{2/a}\, \sin(n\pi x/a)$

ref. a part #1 $\rightarrow$ $\phi_n(x_1)$

ref. a part #2 $\rightarrow$ $\phi_n(x_2)$

Notació: $\chi^{(1)} \leftarrow$ fa referència a partícula #1

$\chi^{(2)} \leftarrow$ fa referència a partícula #2

(a) La f.o. serà

- Distingibles: $\psi_{nm}(x_1, x_2) = \phi_n(x_1)\, \phi_m(x_2) \underset{\chi^{(1)}\chi^{(2)}}{=} \dfrac{2}{a} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)$ $\chi^{(1)}\chi^{(2)}$

  Estat fonamental: $n = m = 1$

- No distingibles:
  - fermions: al estar en el mateix estat d'spin, els nombres quàntics n i m no poden ser els mateixos. L'estat fonamental tendrà un dels # quàntics $= 1$ i l'altre en el següent estat excitat. Aplicant Slater

$$\underbrace{\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) \end{vmatrix}}_{\text{La part espacial ha de ser antisimètrica respecte a l'intercanvi de partícules.}} \underbrace{\chi^{(1)}\chi^{(2)}}_{\text{part de spi simètrica}}$$

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\phi_1(x_1)\phi_2(x_2) - \phi_1(x_2)\phi_2(x_1) \right] \chi^{(1)}\chi^{(2)}$$

  - bosons: els 2 nombres quàntics poden ser iguals, per a l'estat fonamental $n = m = 1$

$$\psi(x_1, x_2) = \text{cte} \cdot \sum_{\substack{\text{sobre les} \\ \text{2! permutacions}}} \phi_1(P_1)\, \phi_1(P_2)$$

$\leftarrow$ on P_1 i P_2 denoten els elements d'una permutació en qüestió

$\downarrow$ això equival a dir

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!\,2!}} \left[\phi_1(x_1)\phi_1(x_2) + \phi_1(x_2)\phi_1(x_1) \right] \chi^{(1)}\chi^{(2)}$$

Així, tant la part espacial com la de spin són simètriques respecte a l'intercanvi de coordenades i de fet

$$\psi(x_1, x_2) = \phi_1(x_1)\, \phi_1(x_2)\, \chi^{(1)}\chi^{(2)}$$

(b) ? $P\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix} \in (0, a/2)\right)$ 2 fermions.

hem d'aumper la ψ per a 2 fermions

$$P\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix} \in (0, a/2)\right) = \int_0^{a/2} dx_1 \int_0^{a/2} dx_2 \, |\psi(x_1, x_2)|^2$$

$$= \int_0^{a/2} dx_1 \int_0^{a/2} dx_2 \left[\phi_1^2(x_1)\, \phi_2^2(x_2) - \phi_1(x_1)\, \phi_2(x_2)\, \phi_1(x_2)\, \phi_2(x_1) \right]$$

$$= A_1 A_2 - A_{12}^2$$

on

$$A_1 = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = 1/2$$

$$A_2 = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = 1/2$$

$$A_{12} = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) = \frac{4}{a} \int_0^{a/2} dx \, \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{4}{3\pi}$$

llavors

$$P_{\text{demanada}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \sim 0'07$$

(c) Densitat de probabilitat ~~relativa~~ per a la distància relativa entre 2 fermions:

$$\boxed{\text{Aquest apartat està directament relacionat amb l'exercici \#93 fet a classe.}}$$

Volem calcular $\text{Probab}\left(|x_2 - x_1| = \text{una certa distància}\right)$

continua

Tal i com varem veure a l'exercici #93 dels fets a classe:

(1) Primer calcularem $P(x_2 - x_1 = d)$

(2) Llavors $P(|x_2 - x_1| = d) = P(x_2 - x_1 = d) + P(x_2 - x_1 = -d)$

(1) El primer que feim és passar a coordenades del centre de Masses ($\equiv X$) i distancia relativa $r \equiv x_2 - x_1$. Notar que r tant pot prendre ara valors >0 com <0.

$$X \equiv \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad r \equiv x_2 - x_1$$

De l'apartat (b) sabem que la probabilitat de trobar part #1 a x_1 i part #2 a x_2 és:

[eq. 1] $$P(x_1, x_2) = |\psi(x_1, x_2)|^2 = \phi_1^2(x_1)\,\phi_2^2(x_2) - \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_1(x_2)\phi_2(x_1)$$

Ara caldria passar de $P(x_1, x_2)$ a $P(x, r)$

$$\cancel{|\psi(x_1,x_2)|^2 = \frac{4}{a^2}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}(x - r/2)\right)\left(2\sin\left(\frac{\pi}{a}(x+r/2)\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}(x+r/2)\right)\right)^2\right.}$$

$$\cancel{-\sin\left(\frac{\pi}{a}(x-r/2)\right)(\cos}$$

Primer

$$X \equiv \frac{x_1 + x_2}{2} \longrightarrow 2X = x_1 + x_2 \qquad -2X = -x_1 - x_2$$

$$r = x_2 - x_1 \longrightarrow r = x_2 - x_1 \qquad r = x_2 - x_1$$

Suma $\qquad$ Suma

$$\boxed{x_2 = x + \frac{r}{2}} \qquad \boxed{x_1 = x - \frac{r}{2}}$$

per alleugerir la notació direm:

$$S_+ \equiv \sin\left(\frac{\pi}{a}\left(x + \frac{r}{2}\right)\right) \qquad C_+ \equiv \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(x + \frac{r}{2}\right)\right)$$

$$S_- \equiv \sin\left(\frac{\pi}{a}\left(x - \frac{r}{2}\right)\right) \qquad C_- \equiv \cos\left(\frac{\pi}{a}\left(x - \frac{r}{2}\right)\right)$$

Aleshores [l'eq 1] la podem escriure com

$$P(x,r) = \frac{4}{a^2}\left[S_-^2 (2S_+C_+)^2 - S_-(2S_+C_+)\, S_+ (2S_-C_-) \right]$$

on hem fet ~~serf~~ servir que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Això ho podem escriure com

$$P(x,r) = \frac{16}{a^2} S_-^2 S_+^2 \left[C_+^2 - C_+ C_- \right]$$

Ara per obtenir $P(r)$ hem integra sobre qualsevol possible posició del centre de masses x, és dir:

$$P(r) = \int_0^a dx\, P(x,r) = \left(I_1 - I_2 \right) \frac{16}{a^2}$$

on

$$I_1 = \int_0^a dx\, S_-^2 S_+^2 C_+^2 = \frac{a}{16}$$

$$I_2 = \int_0^a dx\, S_-^2 S_+^2 C_+ C_- = \frac{a}{32}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{a}\frac{r}{2}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{a}\frac{r}{2}\right) \right)$$

per tant:

$$P(r) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a} r\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{a} r\right) \right] \right)$$

Llavors la densitat de probabilitat demanada serà:

$$\mathcal{P}(|x_2 - x_1| = d) = P(r=d) + P(r=-d) = 2\,P(d)$$

$$= \frac{1}{a}\left(2 - \cos\left(\frac{\pi}{a} d\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{a} d\right) \right)$$

així $\mathcal{P}(d \to 0) \to 0$ ja que es repel·lisen al ser fermions (P. exclusió)

[illegible]

Juny 2011

Problemes #4

Deuteri $\nearrow 1e^-$ $\searrow p+n$

obtenim
$E = \nearrow -3'4eV$, $\searrow -1'5eV$ amb = probab

$\hat{L}^2 \Rightarrow \nearrow 0$, $\searrow 2\hbar^2$ amb = probab

$\hat{L}_z \Rightarrow 0$ sempre $\Rightarrow \boxed{m=0}$

$$E_n = -\frac{m_e(Z\alpha c)^2}{2n^2}$$ quan $Z=1 \rightarrow |E_1| = 13'6eV$

per tant $$\frac{m_e(\alpha c)^2}{2} = 13'6eV$$

llavors $$E_n = -\frac{Z^2\, 13'6eV}{n^2} \rightarrow n = \sqrt{\frac{-13'6eV}{E}}$$ $\nearrow \boxed{n=2} \Leftrightarrow E=-3'4eV$, $\searrow \boxed{n=3} \Leftrightarrow E=-1'5eV$

$\hat{L}^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \rightarrow \boxed{l=0} \\ 2\hbar^2 \rightarrow \boxed{l=1} \end{cases}$ $\overset{\text{ja que}}{\Leftarrow}$ $\hat{L}^2 |nlm\rangle = l(l+1)|nlm\rangle$

(a)

$$\Psi(\vec{r},t) = \alpha_1 \psi_{210}(\vec{r})\, e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}} + \alpha_2 \psi_{200}\, e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}} + \alpha_3 \psi_{310}\, e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}} + \alpha_4 \psi_{300}\, e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}$$

i vull que
$|\alpha_2|^2 + |\alpha_4|^2 = 1/2$ ← pq E_2 i E_3 apareixen amb mateixa probab.
$|\alpha_1|^2 + |\alpha_3|^2 = 1/2$ ←
$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1/2$ ← pq mesurem 0 i $2\hbar^2$ amb igual probab
$|\alpha_3|^2 + |\alpha_2|^2 = 1/2$ ← pq mesurem 0 i $2\hbar^2$ amb igual probab
$\sum |\alpha_n|^2 = 1$ ← la suma de tots ha de donar 1.

Això implica $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = |\alpha_3|^2 = |\alpha_4|^2$

Donat que els $\langle\psi|\phi_{nlm}\rangle \in \mathbb{R}$, és dir $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$
això implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1/2$

~~Això es verifica si $|\alpha_1|^2 = |\alpha_2|^2 = |\alpha_3|^2 = |\alpha_4|^2 = |\alpha|^2 = 1/4$~~

~~Per tant $\alpha = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ ← no te pq, però compte~~

Així doncs

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left(\Psi_{210}\, e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}} + \Psi_{200}\, e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}} + \Psi_{310}\, e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}} + \Psi_{300}\, e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}\right)$$

$$\boxed{\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} \overbrace{(\Psi_{210}+\Psi_{200})}^{\overset{\text{NOT}}{\equiv} A} + e^{-\frac{iE_3t}{\hbar}} \overbrace{(\Psi_{310}+\Psi_{300})}^{\overset{\text{NOT}}{\equiv} B}\right)}$$

(b) Densitat de Probab. $\Longleftrightarrow$ $|\Psi(\vec{r},t)|^2$

$$|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi = \frac{1}{2}\left(e^{+\frac{iE_2t}{\hbar}} A^* + e^{+\frac{iE_3t}{\hbar}} B^*\right)\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} A + e^{-\frac{iE_3t}{\hbar}} B\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(A^*A + e^{+\frac{iE_2t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_3t}{\hbar}} A^*B + e^{\frac{iE_3t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} B^*A + B^*B\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(|A|^2 + |B|^2 + A^*B\, e^{\frac{i(E_2-E_3)t}{\hbar}} + e^{\frac{-i(E_2-E_3)t}{\hbar}} B^*B\right)$$

$$|\Psi_{210}+\Psi_{200}|^2 =$$

No el desenvolupis finalment

(b) Forma llarga de fer-ho:

$$\langle \hat{L}^2 \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{L}^2 | \psi \rangle =$$

$$= \langle \psi | \hat{L}^2 | \tfrac{1}{2} \left(e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} (\psi_{210} + \psi_{200}) + e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} (\psi_{310} + \psi_{300}) \right) \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \langle \psi | \, e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \left(1(1+1)\, \psi_{210} + 0 \right) + e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} \left(1\cdot(1+1)\, \psi_{310} + 0 \right) \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2} \langle \tfrac{1}{2} \left(e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} (\psi_{120} + \psi_{200}) + e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} (\psi_{310} + \psi_{300}) \right) | \, e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} 2 \psi_{210} + e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}} 2 \psi_{310} \rangle$$

Notacio per no escriure tant $a \equiv e^{-iE_2 t/\hbar}$ $b = e^{+iE_3 t/\hbar}$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \langle a\psi_{210} + a\psi_{200} + b\psi_{310} + b\psi_{300} | 2a\psi_{210} + 2b\psi_{310} \rangle$$

emprant el fet que les ψ_{nlm} formen una BON, i les prop. del prod. escalar

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left[\langle a\psi_{210} | 2a\psi_{210} \rangle + \langle b\psi_{310} | 2b\psi_{310} \rangle \right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left[2a^* a \overbrace{\langle \psi_{210} | \psi_{210} \rangle}^{=1} + 2b^* b \overbrace{\langle \psi_{310} | \psi_{310} \rangle}^{=1} \right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left[2 \underbrace{|a|^2}_{1} + 2 \underbrace{|b|^2}_{1} \right] = \frac{\hbar^2}{4} 4 = \hbar^2 \text{ au}$$

Per tant $\langle \hat{L}^2 \rangle_\psi = \cancel{2}\hbar^2$

$$\boxed{\text{Forma curta: } \langle L^2 \rangle = 2\hbar^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot \tfrac{1}{2} = \hbar^2}$$

(c) Si el neutró esdevé un protó $\overset{\text{llavors}}{\Rightarrow}$ $Z=1 \longrightarrow Z=2$

~~[illegible]~~

Estat fonamental nou àtom: $\phi_{100}^{(z=2)}(\vec{r},t,z=2) \equiv \underset{\text{cte normalització}}{C_{100}^{r}} R_{10}^{(z=2)} Y_0^0 \, e^{\frac{-iE_1^{(z=2)}t}{\hbar}}$

Funció d'ona abans del canvi:

$$\underset{(z=1)}{\psi(\vec{r},t)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}(\psi_{210}+\psi_{200}) + e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}(\psi_{310}+\psi_{300})\right)$$

En l'aproximació de transició sobtada

$$\text{Prob.} = \left|\langle \psi_{(z=1)}(\vec{r},t) \,|\, \phi_{100}^{(z=2)}(\vec{r},t,z=2)\rangle\right|^2$$

- Comencem calculant:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{2}\langle e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}(\psi_{210}+\psi_{200}) + e^{\frac{-iE_3t}{\hbar}}(\psi_{310}+\psi_{300}) \,|\, \phi_{100}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\frac{iE_2t}{\hbar}}(\langle\psi_{210}|\phi_{100}\rangle + \langle\psi_{200}|\phi_{100}\rangle) + e^{\frac{iE_3t}{\hbar}}(\langle\psi_{310}|\phi_{100}\rangle + \langle\psi_{300}|\phi_{100}\rangle)\right]$$

Ara hem de calcular les 4 integrals.

deixant a banda la part temporal

$$\langle\psi_{210}|\phi_{100}\rangle = \langle C_{210} R_{21} Y_1^0 \,|\, C_{100}^r R_{10}^{(z=2)} Y_0^0\rangle =$$

$$= C_{210}^* C_{100}^r \langle R_{21}|R_{10}\rangle \underbrace{\langle Y_1^0|Y_0^0\rangle}_{0} = 0$$

$\leftarrow$ els harmònics esfèrics formen una BON.

$\langle\psi_{310}|\phi_{100}\rangle = 0$ per la mateixa raó

$$\langle\psi_{200}|\phi_{100}\rangle = \langle C_{200} R_{20} Y_0^0 \,|\, C_{100}^r R_{10}^{(z=2)} Y_0^0\rangle = C_{200}^* C_{100}^r \langle R_{20}^{(z=1)}|R_{10}^{(z=2)}\rangle \overbrace{\langle Y_0^0|Y_0^0\rangle}^{1}$$

$$\langle\psi_{300}|\phi_{100}\rangle = \langle C_{300} R_{30} Y_0^0 \,|\, C_{100}^r R_{10}^{(z=2)} Y_0^0\rangle = C_{300}^* C_{100}^r \langle R_{30}^{(z=1)}|R_{10}^{(z=2)}\rangle \underbrace{\langle Y_0^0|Y_0^0\rangle}_{1}$$

Caldrà calcular doncs $\langle R_{20}^{(z=1)}|R_{10}^{(z=2)}\rangle$ i $\langle R_{30}^{(z=1)}|R_{10}^{(z=2)}\rangle$

Anem a calcular $\langle R_{20}^{(Z=1)} | R_{10}^{(Z=2)} \rangle$ i $\langle R_{30}^{(Z=1)} | R_{10}^{(Z=2)} \rangle$

$$\langle R_{20}^{(Z=1)} | R_{10}^{(Z=2)} \rangle = \int_0^\infty r^2 \underset{(Z=1)}{R_{20}^*} R_{10}^{(Z=2)} dr$$

$$= \cancel{\int_0^\infty r^2\, 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}}$$

$$= \int_0^\infty r^2\, 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}\, 2\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2} e^{-2r/a_0} dr$$

$$= 4\left(\frac{2}{2a_0^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty r^2 \left(1-\frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0} e^{-2r/a_0} dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\int_0^\infty r^2 e^{-r/2a_0} e^{-2r/a_0} dr - \int_0^\infty \frac{r^3}{2a_0} e^{-r/2a_0} e^{-2r/a_0} dr\right)$$

Sigui $\alpha \overset{NOT}{\equiv} \frac{1}{2a_0} + \frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{5}{2a_0} \longrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{2a_0}{5}$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\int_0^\infty r^2 e^{-r\cdot\alpha} dr - \int_0^\infty \frac{r^3}{2a_0} e^{-r\alpha} dr\right)$$

Schaum: $\int_0^\infty x^m e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}} =$ || $\Gamma(m+1) = m!$ si $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{2!}{\alpha^3} - \frac{3!}{\alpha^4\, 2a_0}\right) = \frac{4}{a_0^3}\left(2\left(\frac{2a_0}{5}\right)^3 - \frac{6}{2a_0}\cdot\left(\frac{2a_0}{5}\right)^4\right)$$

$$= 4\left(\frac{2\cdot 2^3}{125} - \frac{6\cdot 2^4}{2\cdot 5^4}\right) = \overset{=2^6}{4\cdot 2^4}\left(\frac{1}{125} - \frac{6}{625\cdot 2}\right) = 64\cdot\left(\frac{10-6}{625\cdot 2}\right) = \frac{64\cdot}{625\cdot 2}$$

$$= \frac{128}{625}$$

És dir $\boxed{\langle R_{20}^{(Z=1)} | R_{10}^{(Z=2)} \rangle = \frac{128}{625} = 0'2048}$

Per altra banda

$$\left\langle R_{30}^{(Z=1)} \middle| R_{10}^{(Z=2)} \right\rangle =$$

$$\int_0^\infty r^2 \, 2\left(\frac{1}{3a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{2r}{3a_0}+\frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/3a_0} \, 2\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2} e^{-2r/a_0} \, dr$$

$$= 4\left(\frac{2}{3a_0^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty r^2\left(1-\frac{2r}{3a_0}+\frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r\cdot\left(\frac{1}{3a_0}+\frac{2}{a_0}\right)}$$

Sigui $\alpha \overset{NOT}{\equiv} \frac{1}{3a_0}+\frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{3}+2\right) = \frac{7}{3a_0} \rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{3a_0}{7}$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty r^2 e^{-r\alpha} - \frac{2}{3a_0}\int_0^\infty r^3 e^{-r\alpha} + \frac{2}{27a_0^2}\int_0^\infty r^4 e^{-r\alpha}\right]$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left[\frac{2!}{\alpha^3} - \frac{2}{3a_0}\frac{3!}{\alpha^4} + \frac{2}{27a_0^2}\frac{4!}{\alpha^5}\right]$$

$$= \frac{4}{\cancel{a_0^3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left[\frac{2!\,3^3\cancel{a_0^3}}{7^3} - \frac{2}{3\cancel{a_0}}\frac{3!\,3^4\cancel{a_0^4}}{7^4} + \frac{2}{27\cancel{a_0^2}}\frac{4!\,3^5\cancel{a_0^5}}{7^5}\right]$$

$$= 4\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\left[\frac{2\cdot 27}{7^3} - \frac{4\cdot 3^4}{7^4} + \frac{16\cdot 3^3}{7^5}\right]$$

$$= 0'10493$$

Així donces:

$$\langle \psi_{200} | \phi_{100} \rangle = C_{200}^{*} C_{100}^{\blacktriangledown} \, 0'2048$$

$$\langle \psi_{300} | \phi_{100} \rangle = C_{300}^{*} C_{100}^{\blacktriangledown} \, 0'10493$$

on les cts de normalització

$$\langle \psi_{200} | \psi_{200} \rangle = 1 \to \int_0^{\infty} \int_{\Omega} C_{200}^{*} C_{200} R_{20}^{*} Y_0^{0*} R_{20} Y_0^0 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |C_{200}|^2 \underbrace{\int_0^{\infty} R_{20}^{*} R_{20} r^2 dr}_{\displaystyle \int_0^{\infty} 4 \left(\frac{1}{2a_0}\right)^3 \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} r^2 = 1} \overbrace{\int_{\Omega} Y_0^{0*} Y_0^0 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}^{=1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_{200} = 1$$

Podem agafar

$$|C_{300}|^2 \underbrace{\int_0^{\infty} 4 \left(\frac{1}{3a_0}\right)^3 \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3a_0}} r^2 dr}_{=1} \overbrace{\int_{\Omega} Y_0^{0*} Y_0^0 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}^{=1} = 1$$

Per tant tb. $C_{300} = 1$.

$$|C_{100}^{\blacktriangledown}|^2 \overbrace{\int_0^{\infty} \int_{\Omega} R_{10}^{(z=2)*} R_{10}^{(z=2)} Y_0^{0*} Y_0^0 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}^{= \langle \phi_{100}^{(z=2)} | \phi_{100}^{(z=2)} \rangle} = 1$$

$$|C_{100}^{\blacktriangledown}|^2 \underbrace{\int_0^{\infty} 4 \left(\frac{2}{a_0}\right)^3 e^{-\frac{4r}{a_0}} r^2 dr}_{=1} \overbrace{\int_{\Omega} Y_0^{0*} Y_0^0 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}^{=1} = 1$$

Per tant tb podem agafar $C_{100} = 1$

Així doncs:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{2}\left[e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} (0 + 0'2048) + e^{\frac{iE_3 t}{\hbar}} (0 + 0'10493 \ldots\right.$$

i per tant

$$|\langle \psi|\phi\rangle|^2 = \frac{1}{4}\left[0'2048\, e^{\frac{iE_2 t}{\hbar}} + 0'10493\, e^{\frac{iE_3 t}{\hbar}}\right]\cdot\left[0'2048\, e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} + 0'10493\, e^{\frac{-iE_3 t}{\hbar}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left((0'2048)^2 + (0'10493)^2 + 0'2048 \cdot 0'10493 \underbrace{\left[e^{\frac{i(E_2-E_3)t}{\hbar}} + e^{\frac{-i(E_2-E_3)t}{\hbar}}\right]}_{= 2\cos\left(\frac{(E_2-E_3)t}{\hbar}\right)}\right)$$

llavors

$$\boxed{|\langle \psi|\phi\rangle|^2 = 0'013238 + 0'01074 \cos\left(\frac{\overbrace{(E_2-E_3)}^{= -1'9\,eV} t}{\hbar}\right)}$$

hom podria ara dir $\hbar \simeq 6'582173 \cdot 10^{-22}$ MeV s.
però vaja... així ja va bé...