Espín

75. Construid las matrices de los operadores de espín $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ en el caso $S = 1$.

76. Hallar los valores esperados de los operadores S_x, S_y, S_z del espinor $\begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ que representa a un electrón.

77. Demostrad que para cualquier vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se tiene que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})^2 = a^2 \mathbf{1}$, siendo $a = |\vec{a}|$, $\mathbf{1}$ la matriz identidad, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ las matrices de Pauli y $\vec{\sigma} \cdot \vec{a} = a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z$. Utilizad este resultado para demostar que:
$$\mathrm{e}^{i\vec{\sigma}\cdot\vec{a}} = \cos a \cdot \mathbf{1} + i\frac{\sin a}{a}\vec{\sigma} \cdot \vec{a}$$

78. Una partícula tiene espín 1/2. Se efectúa una medida de la suma $S_x + S_y$. ¿Cuáles son los posibles resultados de esa medida? A continuación se mide S_z. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar los valores $+\hbar/2$, 0, $-\hbar/2$?

79. De un aparato de Stern-Gerlach salen partículas de $S = 1/2$ con velocidad v en la dirección y y con valor propio $+\hbar/2$ del espín en la dirección x. Se las hace pasar una zona de longitud L que contiene un campo magnético uniforme y constante B en la dirección positiva del eje z. Hallar la probabilidad de que dichas partículas emerjan con spín $-\hbar/2$ en la dirección x.

80. La parte de espín de la función de onda de un electrón es el espinor $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. ¿En qué dirección del espacio $\hat{\mathbf{n}}$ hay que colocar el aparato de Stern-Gerlach para encontrar al sistema en un estado propio de $S_{\hat{\mathbf{n}}}$ con el valor propio $-\hbar/2$?

81. En un experimento de Stern-Gerlach, la componente del haz en la dirección z de espín $+\hbar/2$ se hace incidir sobre un segundo imán del mismo tipo cuyo campo magnético está orientado en la dirección $\hat{\mathbf{n}} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$. Determinar las intensidades de los átomos emergentes.

82. Sea $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ con $\vec{L}$ y $\vec{S}$ dos operadores de momento angular. Enumenar los valores posibles de j y m_j para estados en los cuales $\ell = 3$, $s = 1/2$. Escribir dichos estados en la base propia de L_z y S_z. Ídem para $\ell = 3$ y $s = 2$.

83. Sea la función del átomo de Hidrógeno: $\Psi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{3}}\varphi_{2,1,0,1/2}(\vec{r}) + \sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_{2,0,0,-1/2}(\vec{r})$. Calcular las probabilidades de los distintos valores que puede arrojar una medida del momento angular total J^2.

84. Considerad un electrón en un átomo hidrogenoide que, además del hamiltoniano usual, tiene un término de la forma $a\vec{L} \cdot \vec{S}$, siendo a una constante y $\vec{L}$ y $\vec{S}$ los momentos angulares orbitales y de espín, respectivamente. Resolver la ecuación de Schrödinger y encontrar la funciones propias y sus energías correspondientes. Es recomendable trabajar en la base propia de J^2, J_z, L^2, S^2.

85. Considerad un sistema de dos partículas de espín 1/2 no interaccionantes. Si la primera partícula está en el estado $\cos\alpha_1 \cdot \chi_+ + \sin\alpha_1 \cdot \chi_-$ y la segunda en $\cos\alpha_2 \cdot \chi_+ + \sin\alpha_2 \cdot \chi_-$, ¿cuáles son las probabilidades de que el sistema de dos partículas esté en un estado singlete o en un estado triplete?

86. Considerad dos electrones es un estado singlete del espín total. (a) Si una medida del espín de uno de los electrones muestra que está en un estado con $s_z = +\hbar/2$ ¿Cuál es la probabilidad de que una medida del la componente z del espín del otro electrón dé también el valor $s_z = +\hbar/2$? (b) Si una medida del espín de uno de los electrones muestra que está en un estado con $s_y = +\hbar/2$ ¿Cuál es la probabilidad de que una medida del la componente x del espín del otro electrón dé el valor $s_x = +\hbar/2$?

Partículas idénticas

87. Considerad dos electrones no interaccionantes en un pozo infinito unidimensional. Escribid la función de onda del estado fundamental (no olvidar la parte del espín). ¿Cuál es la energía más baja posible si los dos electrones están en el mismo estado de espín?

88. Considérense N electrones no interaccionantes en un pozo infinito unidimensional. ¿Cuál es la energía del estado fundamental?

89. Escribid una función de onda válida para un sistema de 3 electrones no interaccionantes en un pozo infinito.

90. El núcleo de tritio tiene un protón y dos neutrones. Considerad que este núcleo puede representarse mediante un pozo de potencial unidimensional infinito que contiene a las tres partículas sin interacción entre sí. Escribir la función de onda del estado fundamental y del primer estado excitado (suponer que el protón y el neutrón tienen la misma masa).

91. Encontrad las funciones de onda de dos partículas sin interacción en un pozo infinito unidimensional en los casos que las partículas sean (a) distinguibles, (b) bosones, (c) fermiones (no se considera la parte de espín de la función de onda). Calculad los valores esperados de la energía y de la separación cuadrática media, en el estado fundamental y el primer estado excitado.

92. Sean dos electrones que están en el mismo estado de espín y cuyas funciones de onda son paquetes gaussianos unidimensionales centrados en $x = +a$ y $x = -a$, es decir, proporcionales a $e^{-\frac{(x-a)^2}{2a_0^2}}$ y $e^{-\frac{(x+a)^2}{2a_0^2}}$. Construid una función de onda adecuada para el sistema global. Calculad la función de densidad de probabilidad de encontrar un electrón en un punto x del espacio y, si $a_0 = 0{,}5\text{Å}$, estimad para qué valor de a se pueden ignorar los efectos del principio del Pauli con una precisión de 10^{-6}.

93. Para la situación del problema anterior, calculad la función densidad de probabilidad para la coordenada relativa $x_2 - x_1$ entre los dos electrones. Dibujadla para distintos valores de a y discutid las diferencias que hay respecto al caso de haber considerado que las partículas son bosones o distinguibles.