Problemas tridimensionales. Átomo de hidrógeno.

55. En un modelo para el núcleo de deuterio se supone que el protón y el neutrón están ligados por un potencial central tipo pozo: $V(r) = -V_0 =$ si $r \leq a$ y $V(r) = 0$ si $r > a$, con $a = 2 \times 10^{-15}$m. Encontrad el valor que ha de tener V_0 para que haya sólo un estado ligado con energía $E_0 = -2{,}2$MeV.

56. Encontrad los niveles de energía y su degeneración para un oscilador armónico isotrópico tridimensional de potencial $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ resolviendo el problema en coordenadas esféricas. Comparad con el resultado obtenido en coordenadas cartesianas.

57. Normalizar y verificar las condiciones de ortogonalidad de las funciones propias de un átomo hidrogenoide.

58. Calcular el valor esperado de r y de z para el estado fundamental del átomo de hidrógeno. Calcular también el producto $\Delta r \cdot \Delta p_r$ y comparar con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

59. Sea un átomo de hidrógeno en el estado 2s. (i) ¿Cuál es la distancia electrón-protón más probable? (ii) Encontrad la distancia media entre el eletrón y el protón.

60. De un átomo de hidrógeno se sabe que: a) Está en un estado p con $n = 2$. b) El estado contiene sólo autoestados de $\hat{L}_z$ con $m = \pm 1$. c) El valor esperado de $\hat{L}_z$ es cero. d) La probabilidad de encontrar al e$^-$ en el primer cuadrante $(0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ es del 25 %. Escribir las posibles funciones de onda para este estado.

61. Se sabe que la función de onda de un electrón en un átomo de hidrógeno es combinación de la del estado fundamental y primer estado excitado, y que $\langle \hat{L}_z \rangle = 0$. Escribir la función de onda más general que cumple estos requisitos.

62. Un átomo de hidrógeno está en un estado descrito por la función de onda:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{6}\left[4\Psi_{100}(\vec{r}) + 3\Psi_{211}(\vec{r}) - \Psi_{210}(\vec{r}) + \sqrt{10}\Psi_{21-1}(\vec{r})\right]$$

a)¿Cuál es el valor esperado de la energía? b)¿Cuál es el valor esperado de $\hat{\mathbf{L}}^2$? c)¿Cuál es el valor esperado de $\hat{L}_z$?

63. Sea un átomo de hidrógeno cuya función de onda en $t = 0$ es:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{14}}\left[2\Psi_{100}(\vec{r}) - 3\Psi_{200}(\vec{r}) + \Psi_{322}(\vec{r})\right]$$

(i) ¿Es propia de los operadores $\hat{\mathbf{L}}^2$ y $\hat{L}_z$? (ii) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón en los estados $|1,0,0\rangle$, $|2,0,0\rangle$, $|3,2,2\rangle$, $|3,2,-2\rangle$? (iii) ¿Cómo será la función de onda para $t > 0$?.

64. Un átomo de hidrógeno está en un estado descrito por

$$\Psi(\vec{r}) = Nr\exp\left(-r/2a_0\right)$$

con $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. ¿Cuál es la probabilidad de encontrarlo en el estado fundamental?

65. Sea la siguiente función de onda para el átomo de hidrógeno:

$$\Psi(\vec{r}) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} \exp\left(-\alpha^2 r^2/2\right)$$

Encontrar el valor esperado de la energía y discutir si esta función puede describir correctamente a un electrón ligado.

66. Calcular la probabilidad de presencia del electrón del átomo de hidrógeno dentro del núcleo en los estados de átomo con $n = 1, 2, 3$. Calcular esta misma probabilidad para un muón μ^- ligado a un protón en el estado 1s.

Momento angular

67. Calcular los conmutadores: $[\hat{L}_i, \hat{x}_j]$, $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$, para $i, j = 1, 2, 3$.

68. Encontrad la ecuación del movimiento del valor esperado de $\vec{L}$ para el hamiltoniano $\mathcal{H} = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r})$.

69. Demostrar que si un operador conmuta con $\hat{L}_x$ y $\hat{L}_y$, entonces conmuta con $\hat{L}_z$ y con $\hat{\mathbf{L}}^2$.

70. Demostrar que los valores esperados de las componentes $\hat{L}_x$ y $\hat{L}_y$ son cero cuando el sistema se encuentra en un valor propio de $\hat{L}_z$. Hallar $\langle \hat{L}_x^2 \rangle$, $\langle \hat{L}_y^2 \rangle$ y $\langle \hat{L}_z^2 \rangle$ para este estado.

71. Mostrar que la parte angular de las componentes de $\vec{r} = (x, y, z)$ son combinaciones lineales de los armónicos esféricos con $\ell = 1$.

72. Considerar un sistema con momento angular $\ell = 1$ representado por el vector de estado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{26}} \left[|1, 1\rangle + 4|1, 0\rangle + 3|1, -1\rangle\right]$$

¿Cuál es el valor esperado de $\hat{L}_z$? ¿Cuál es la probabilidad de que una medida de $\hat{L}_z$ dé el valor cero? Responder a las mismas preguntas para el operador $\hat{L}_x$.

73. El estado de una partícula viene dada por la siguiente función de onda:

$$\Phi(\vec{r}i) = A \left[\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] \mathrm{e}^{-r/a_0}$$

calcular: a) Los valores posibles de $\hat{L}_z$ y sus probabilidades. b) Los valores posibles de $\hat{\mathbf{L}}^2$ y sus probabilidades. c) Los valores esperados de $\hat{L}_z$ y $\hat{\mathbf{L}}^2$.

74. Si $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ son dos operadores de momento angular independientes, demostrar que $\vec{J} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ conmuta con $\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2$, pero no con las componentes de $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$.