

43. Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión de un electrón de 2,5 eV de energía que choca con un potencial de tipo escalón de altura 2 eV. ¿Qué pasaría si la energía del electrón fuese 1,99 eV?
44. Un protón y un deuterón inciden sobre una barrera de potencial cuadrada de 10 MeV de altura y una anchura de 10^{-14} m. Ambas partículas tienen una energía cinética de 3 MeV. ¿Cuál de las dos tiene más probabilidad de pasar la barrera? Calcular tales probabilidades.
45. Una partícula de masa μ está atrapada en un pozo infinito de anchura a . Los estados estacionarios de este sistema tienen las siguientes funciones de onda y energías:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{si } x < 0, x > a \end{cases}; \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu a^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Calcular $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ y $\langle p^2 \rangle$ del estado n -ésimo.
- b) ¿Para qué valor de n el producto de las incertidumbres $\Delta x \Delta p$ es mínimo?
46. Determinar los estados ligados correspondientes a un potencial delta, $V(x) = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2ma} \delta(x)$, y a un potencial de doble delta, $V(x) = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2ma} [\delta(x-a) + \delta(x+a)]$.
47. La función de onda normalizada del estado fundamental del oscilador armónico de frecuencia ω es

$$X_0(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} \exp(-\alpha^2 x^2 / 2)$$

- con $\alpha \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}$. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la zona permitida clásicamente?
48. Un oscilador armónico se encuentra en un estado para el cual hay una probabilidad 1/2 de que al realizar una medida ésta corresponda al estado fundamental y una probabilidad 1/2 de que corresponda al primer estado excitado. Además, se conoce el valor esperado de x . ¿Con estos datos la función de onda puede quedar completamente determinada?
49. Un oscilador armónico tiene la misma probabilidad de encontrarse en el estado fundamental o en el primer estado excitado, y probabilidad nula de encontrarse en cualquier otro estado. Calcúlese el valor esperado de x y de p en función del tiempo y de la fase.
50. Sea un oscilador armónico de frecuencia ω y masa m , descrito en $t = 0$ por la función de onda

$$\Psi(x, 0) = N \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \varphi_n(x)$$

donde $\varphi_n(x)$ son las funciones propias (normalizadas) del oscilador armónico. (a) Normalizar $\Psi(x, 0)$. (b) Determinar una expresión de $\Psi(x, t)$ para todo $t > 0$. (c) Calcular el valor esperado de la energía para cualquier instante. (d) Calcular $\langle x(t) \rangle$. (e) ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante t la partícula se encuentre en el mismo estado en que se encontraba en $t = 0$?

Representación matricial

51. Utilizar la representación matricial de los operadores $\hat{x}$, $\hat{p}$ y $\hat{H}$ en la base de vectores propios del oscilador armónico unidimensional para comprobar las siguientes propiedades:

a) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$
 b) $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$

52. El hamiltoniano de un sistema tiene la forma

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \hbar\omega$$

Hallar los valores propios de la energía y sus vectores propios.

53. Dado un vector estado del oscilador armónico unidimensional representado por la columna

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

calcular las siguientes cantidades para tal estado:

- a) $\langle H \rangle$.
 b) $\langle x^2 \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ y $\langle p^2 \rangle$.
 c) A partir de los resultados de b), calcular $(\Delta x)^2$ y $(\Delta p)^2$.

54. El hamiltoniano de un sistema y un operador $\hat{A}$ vienen descritos por las matrices

$$\hat{H} = \hbar \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & y \\ y^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Resolver el problema de valores propios y encontrar el operador de evolución temporal para el hamiltoniano.
 b) Encontrar el valor esperado del observable A en el instante t , si el estado del sistema inicialmente estaba descrito por el vector $(1, 0)$.