Álgebra de operadores

25. **[6.0]** Demostrar que $(\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a}$ y que $(\lambda\hat{a})^\dagger = \lambda^*\hat{a}^\dagger$.

26. **[6.0]** Demostrar que $(\hat{a}\hat{b})^\dagger = b^\dagger a^\dagger$ y que $(\hat{a}^n)^\dagger = (\hat{a}^\dagger)^n$. Encontrar el operador adjunto de $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$.

27. Demostrar que el valor esperado, $\langle\hat{a}\rangle$, de un operador autoadjunto es un número real y que $\langle\hat{a}^2\rangle$ es un número real positivo.

28. Demostrar que $\|\hat{a}\psi\|^2 = \langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle$.

29. Demostrar las siguientes relaciones entre operadores:
    a) Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son autoadjuntos, $i[\hat{a},\hat{b}]$ también lo es.
    b) Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son autoadjuntos, también lo es $(\hat{a}+\hat{b})^n$.
    c) $[\hat{a}\hat{b},\hat{c}] = \hat{a}[\hat{b},\hat{c}] + [\hat{a},\hat{c}]\hat{b}$.
    d) $[\hat{a},[\hat{b},\hat{c}]] + [\hat{b},[\hat{c},\hat{a}]] + [\hat{c},[\hat{a},\hat{b}]] = 0$ (identidad de Jacobi).

30. Comprobar, mediante el desarrollo en serie de las exponenciales, la siguiente relación:
$$e^{\hat{a}}\,\hat{b}\,e^{-\hat{a}} = \hat{b} + [\hat{a},\hat{b}] + \frac{1}{2!}[\hat{a},[\hat{a},\hat{b}]] + \frac{1}{3!}[\hat{a},[\hat{a},[\hat{a},\hat{b}]]] + \ldots$$

31. Comprobar, mediante el desarrollo de las exponenciales, la fórmula de Campbell-Hausdorff:
$$e^{\hat{a}}e^{\hat{b}} = e^{\hat{a}+\hat{b}+\frac{1}{2}[\hat{a},\hat{b}]+\frac{1}{12}[[\hat{a},\hat{b}],\hat{b}]+\frac{1}{12}[[\hat{b},\hat{a}],\hat{a}]+\ldots}$$

32. Demostrar que si $[\hat{a},\hat{b}] = \lambda$, siendo λ un escalar, se cumple que $[\hat{a},\hat{b}^n] = n\lambda\,\hat{b}^{n-1}$, y particularizar las fórmulas de los dos ejercicios anteriores a este caso.

33. Encontrar los autovalores y autofunciones del operador $\hat{a} = \sin\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$.

La ecuación de Schrödinger

34. Demostrar que las funciones propias del pozo de potencial, $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, son ortogonales. Es decir, que cumplen $\int_0^a dx\, \varphi_n^*(x)\varphi_m(x) = \delta_{n,m}$.

35. Demostrar la relación de completitud a partir del teorema de expansión: dado un conjunto de funciones ortonormales $\varphi_n(x)$ tales que permiten el desarrollo en serie de cualquier función $\psi(x)$ que cumpla $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx$, de forma que $\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x)$, demostrar que se cumple la propiedad $\sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^*(x') = \delta(x - x')$. Realizar también la demostración inversa.

36. Demostrar que en problemas unidimensionales el espectro de energías de estados ligados nunca es degenerado (recuérdese que se verifica $\psi = 0$ en $x = \pm\infty$).

37. Sea un potencial $V(x)$ tal que las funciones de energía definida $E_1, E_2, \ldots$ son $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$, respectivamente. ¿Cuáles son las funciones y los valores propios correspondientes al potencial $C(x) = V(x) + V_0$, donde V_0 es una constante?

38. ¿Qué conclusiones pueden extraerse de la paridad de las funciones propias del hamiltoniano $H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ si la energía potencial es simétrica respecto al orígen? Considerar los casos de (a) el espectro es no degenerado; (b) el espectro es doblemente degenerado.

39. Para la ecuación de Schrödinger unidimensional, comprobar que en los puntos en que la energía potencial sufre un salto finito la función de onda tiene derivada primera continua.

Soluciones de la ecuación de Schrödinger

40. Sea un estado $\Psi(x, t = 0) = N(\varphi_1(x) + 2i\varphi_2(x))$, donde $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son las funciones propias correspondientes, respectivamente, al primer y al segundo nivel de energía de un pozo infinito de potencial.

    a) Escribir $\Psi(x, t)$.

    b) ¿Cuál sería el resultado de una medida precisa de la energía del sistema en cualquier instante t?

    c) ¿Cuál es el valor esperado de dicha energía?

41. Considérese una partícula en un pozo infinito de potencial ($-a < x < a$) descrita por la función de onda $\Psi(x) = N(a^2 - x^2)$.

    a) Normalizar $\Psi(x)$.

    b) Expresar $\Psi(x)$ en términos de funciones propias.

    c) Calcular los valores medios de E y x^2.

    d) Calcular $\Psi(x, t)$.

42. Estímese el valor máximo posible, V_0, para la profundidad de un pozo de potencial unidimensional de $4 \cdot 10^{-15}$ m de anchura en el que hay un neutrón con energía E_0=2 MeV, suponiendo que exista únicamente un nivel de energía en el pozo. ¿Podría calcularse V_0 exactamente?