Examen #2 - Eq. Dif I - Solucions

1 a) $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x)$

- D'accord amb el canvi

$y(x) = z(x)\, e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt} \rightarrow y'(x) = z'\, e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt} - \frac{1}{2} z p\, e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt}$

$\downarrow$

$y''(x) = z''\, e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt} - z' p\, e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt} - \frac{1}{2} z p'\, e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt} + z\left(\frac{1}{2}p\right)^2 e^{-\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt}$

- Ara podem substituir a l'equació i simplificar l'exponencial

$$z'' - z'p - \frac{1}{2} z p' + \frac{1}{4} z p^2 + p z' - \frac{1}{2} z p^2 + q z = g\, e^{\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt}$$

$$z'' + \left(-\frac{1}{2} p' - \frac{1}{4} p^2 + q\right) z = g\, e^{\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt}$$

així doncs

$$z'' + Q(x)\, z = G(x)$$

on $Q(x) = q(x) - \frac{1}{4}(p(x))^2 - \frac{1}{2} p'(x)$

$G(x) = g(x)\, e^{\frac{1}{2}\int_{x_0}^x p(t)\,dt}$

que com veiem no té terme en derivada primera de $z(x)$.

b) $x^2 y'' + 4x^2 y' + (4x^2 - 6)\, y = 0$

$\begin{cases} p(x) = 4 \rightarrow e^{\frac{1}{2}\int^x p(t)\,dt} = e^{2x} \\ q(x) = 4 - \frac{6}{x^2} \end{cases}$ $\rightarrow y(x) = z(x)\, e^{-2x}$ és el canvi a fer

$\begin{cases} Q(x) = 4 - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{4} 4^2 - 0 = \frac{-6}{x^2} \\ G(x) = 0 \end{cases}$

- Llavors l'eq a resoldre és: $z'' - \frac{6}{x^2} z = 0$
- Dita equació és d'Euler
- Proposam solució: $z = x^r \longrightarrow r(r-1) - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -2 \end{cases}$

així doncs

$$z(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} \xRightarrow[\text{el canvi}]{\text{desfeim}} \boxed{y(x) = C_1 e^{-2x} x^3 + C_2 e^{-2x} \cdot x^{-2}}$$

c) No, la solució no es pot desenvolupar per Taylor degut al terme amb x^{-2}

Sí, era previsible, ja que el fet que l'equació $x^2y'' + 4x^2y' + (4x^2-6)y = 0$ tengui un punt singular en $x = 0$ fa que el teorema (pàg 38 apunts) que ens diu que si x_0 és un punt ordinari, llavors podem trobar solucions $y_1(x)$ i $y_2(x)$ de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ no es pot aplicar i per tant no està garantit el que puguem desenvolupar per Taylor la solució

Examen #2 – Eq Diferencials I – Solucions

Ex 2

a

a.1 $x^3(x-1)y'' + x(x-1)y' + x^2 y = 0 \rightarrow y'' + \frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x\cdot(x-1)}y = 0$

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow \text{no és analítica en } x=0 \\ q(x) = \frac{1}{x(x-1)} \rightarrow \text{no és analítica en } \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

Tendrem com a punts singulars $x_0=0$ i $x_0=1$

Anem a veure ara si són regulars o no:

$x_0=0 \Rightarrow \begin{cases} x\cdot p(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \text{no és analítica en } x_0=0 \\ x^2\cdot q(x) = \frac{1}{x-1} \end{cases} \Rightarrow$ x_0 és un Punt Singular Irregular

$x_0=1 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)\cdot p(x) = \frac{x-1}{x^2} \\ (x-1)^2\cdot q(x) = \frac{x-1}{x} \end{cases} \rightarrow$ és analítica en $x=1$ ↓ cap problema i.d.o. $\Rightarrow$ x_0 és un Punt Singular Regular

a.2 $x y'' + (x-1)y' - \lambda y = 0 \rightarrow y'' + \frac{(x-1)}{x}y' - \frac{\lambda}{x}y = 0$

$$\begin{cases} p(x) = \frac{x-1}{x} \\ q(x) = \frac{-\lambda}{x} \end{cases} \rightarrow \text{no és analítica en } x=0 \Rightarrow$$

$x_0=0$ és un PS (Punt singular)

Anem a veure ara si és regular o irregular

$$\begin{cases} x\, p(x) = x-1 \\ x^2\, q(x) = -\lambda x \end{cases} \Rightarrow$$

Són ambdues funcions analítiques a $x=0$ (de fet $\forall x$) $\Rightarrow$ $x_0=0$ és un Punt Singular Regular

Continuació Ex. 2

(b) La darrera equació ($xy'' + (x-1)y' - \lambda y = 0$) té ~~q~~ $x_0 = 0$ com a PSR.

Si la volem desenvolupar al ~~dobt~~ voltant de l'origen ($x_0=0$) llavors caldrà emprar $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ (mètode de Frobenius).

Si la volem desenvolupar al voltant de $x_0 = 1$, llavors podem emprar $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$

En principi podem emprar les dues (cadascuna en el seu cas), ara bé, la solució obtinguda mitjançant el desenvolupament en sèrie al voltant de $x_0 = 1$ té un radi de convergència mínim de 1, mentre que la solució desenvolupada per $x_0 = 0$ amb el mètode de Frobenius tenim garantit que tendrà un radi de convergència infinit. (vegeu la discussió a la pàg 48 dels apunts, després del punt 7.1.4)

Així doncs, sembla més raonable jugar sobre segur i desenvolupar al voltant de $x_0 = 0$, amb la qual cosa tenim garantit que la solució serà vàlida $\forall x$.

(c) A aquest alumne convé fer-li ~~de~~ veure que en la darrera equació:

$$xy'' + (x-1)y' - \lambda y = 0 \rightarrow \underbrace{y'' + \frac{(x-1)}{x} y' - \frac{\lambda}{x} y = 0}$$

Per aplicar el teorema d'existència i unicitat, la $p(x)$ i $q(x)$ s'obtenen d'aquí, és a dir

$$p(x) = \frac{x-1}{x} \longrightarrow \underline{no} \text{ analítica a } x=0$$

$$q(x) = \frac{-\lambda}{x} \longrightarrow \text{idem}$$

Així doncs, al no ser analítiques $p(x)$ i $q(x)$, no podem garantir l'existència d'una única solució que satisfaci la nostra condició inicial. És dir pot passar qualsevol cosa, que $\exists$ 0, 1 o moltes solucions.

Aquest alumne ha comès l'error típic de no deixar la y'' sense cap

Continuació Ex. 2

(d) $xy'' + (x-1)y' - \lambda y = 0$, Frobenius: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1}$, $y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$

llavors si substituim en l'equació diferencial

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1}}_{= xy''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)(n+r) a_n x^{n+r-1}}_{= (x-1)y'} \underbrace{- \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}}_{= -\lambda y} = 0$$

que ho podem reescriure com

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\underbrace{(n+r)(n+r-1) - (n+r)}_{= (n+r)(n+r-2)}] a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r) - \lambda] x^{n+r} a_n = 0$$

llavors tenim, si en el primer sumatori feim $n-1 \to n$ o $n \to n+1$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r-1) a_{n+1} x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r-\lambda) a_n x^{n+r} = 0$$

Per tant, per $n=-1 \to r \cdot (r-2) a_0 = 0 \to \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 0 \end{cases} \to r_1 - r_2 = 2 \in \mathbb{N}$

Fem primer el r més gran, és dir $r = r_1 = 2$

$\boxed{r=2}$ ~~$(n+3)(n+1) a_{n+1} + \ldots$ per $n \geq 0$~~

$$(n+3)(n+1) a_{n+1} + (n+2-\lambda) a_n = 0 \quad \text{per } n \geq 0$$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{-(n+2-\lambda)}{(n+3)(n+1)} a_n} \text{ per } n \geq 0$$

Podem veure que quan $\lambda = n+2$ és dir $\lambda \in \mathbb{N} : \lambda > 1$ tendrem $a_{n+1} = 0 \cdot a_n = 0$ i per tant tots els termes posteriors en la successió valdran zero. La qual cosa farà que la solució $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$ quedarà truncada a un polinomi finit

És dir, quan $n = \lambda - 2 \to a_{\lambda-2+1} = 0 \Rightarrow a_{n \geq \lambda-1} = 0$

i per tant $y(x) = \sum_{n=0}^{\lambda-2} a_n x^{n+2} \Rightarrow$ I el monomi d'ordre ~~super~~ màxim que tendrem serà $x^{n+2} \xrightarrow[n=\lambda-2]{} x^{\lambda}$

$\lambda = 2 \to a_1 = 0 \to a_2 = a_3 = \ldots = 0 \to y_1(x) = a_0 \cdot x^2$

$\lambda = 3 \to a_1 = \frac{1}{3} a_0 \quad \to y_1(x) = a_0 x^2 + a_1 x^3 = a_0 \left(x^2 + \frac{x^3}{3}\right)$

$a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = a_4 = \ldots = 0$

Examen #2 - Eq Diferencials I - Solucions

Continuació Ex. #2

* Part voluntària (per tenir un punt extra)

Facem servir la tècnica de reducció de l'ordre per obtenir $y_2(x)$, sabent que per $\lambda=2$ la $y_1 = x^2$

Proposam el canvi $y = x^2 \cdot v(x) \rightarrow \begin{array}{l} y' = 2xv + x^2 v' \\ y'' = 2v + 4xv' + x^2 v'' \end{array}$

Llavors

$$2xv + 4x^2v' + x^3v'' + \cancel{2x^2v} + x^3v' - \cancel{2xv} - x^2v' - \cancel{2x^2v} = 0$$

$$x^3 v'' + (x^3 + 3x^2)v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -\left(1 + \frac{3}{x}\right) \rightarrow \ln(v') = -x - 3\ln(x)$$

$$v' = x^{-3} e^{-x}$$

$$\downarrow$$

$$v(x) = \int \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$$

$y_2 = x^2 v(x)$

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx$$

I per tant la solució general és

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^2 + C_2 x^2 \underbrace{\int \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx}$$

Aquesta integral és complicada de fer. Es pot resoldre mitjançant sèries de potències, però això no cal per tenir el punt extra. Basta amb deixar la integral implícita escrita

$\boxed{\text{Ex. 3}}$ Facem-ho per inducció:

- Per $n=0 \Rightarrow \Gamma(0+1/2)\,\Gamma(-0+1/2) = (-1)^0 \pi \Rightarrow (\Gamma(1/2))^2 = \pi \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

OK. coincideix amb el que sabem

- Suposem que és cert fins a $n \rightarrow \Gamma(n+1/2)\,\Gamma(-n+1/2) = (-1)^n \pi$

- Per $n+1$ es compliria? És dir vull provar que

$$\Gamma(n+3/2)\,\Gamma(-n-1/2) \overset{?}{=} (-1)^{n+1}\pi$$

Anem a veure:

$$\Gamma(n+1+1/2)\,\Gamma(-n-1+1/2) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Apliquem la propietat} \\ \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \\ \text{a la primera funció gamma} \end{array} \right\}$$

$$= (n+1/2)\,\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(-n-1+1/2) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Apliquem el mateix, és dir} \\ \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \Rightarrow \underset{\Gamma(-n-1+1/2)}{\underset{\|}{\Gamma(-n-1/2)}} = \dfrac{\Gamma(-n+1/2)}{(-n-1/2)} \end{array} \right\}$$

$$= \cancel{(n+1/2)}\,\Gamma(n+1/2)\,\frac{\Gamma(-n+1/2)}{(-1)\,\cancel{(n+1/2)}}$$

$$= (-1)\,\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(-n+1/2) = \left\{ \begin{array}{c} \text{Apliquem ara el fet de que la propietat} \\ \text{que volem provar, hem suposat que} \\ \text{es verifica fins a } n \end{array} \right\}$$

$$= (-1)\,(-1)^n \cdot \pi$$

$$= (-1)^{n+1}\,\pi$$

$\leftarrow$ ok. és el que volíem provar.

Ex. 4 $\quad x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

D'accord amb el vist a teoria

Per $\nu=0$ $\Rightarrow$

$$y(x) = \begin{cases} C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x) & \text{si } x>0 \\ C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(-x) & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Per $\nu=1/4$ En general per $\nu \neq 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2$ no hi ha problemes per trobar les dues solucions i de teoria sabem que per una ν en general

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

i pel cas particular $\nu = 1/4$

$$y(x) = C_1 J_{1/4}(x) + C_2 J_{-1/4}(x)$$

Per $\nu = 1/2$ $\Rightarrow$ varem veure a teoria que la segona solució finalment era $J_{-\nu}$, per tant la solució serà semblant al cas $\nu=1/4$, es dir

$$y(x) = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x)$$

Per $\nu = 1$ Tal i com hem vist a teoria

$$y(x) = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x)$$