(a) Donat el problema $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ **Problema 1**

el teorema afirma que:

Si $\exists\ \Omega = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ tq $(x_0, y_0) \in \Omega$

on $f(x,y)$ i $\partial_y f(x,y)$ són contínues dins de Ω

aleshores

$\exists!\ y(x)$ que satisfà l'eq diferencial i la condició inicial que és vàlida en algun interval $(x_1, x_2) \in (\alpha, \beta)$. El que no diu el teorema és ~~quan~~ quant han de valer x_1 i x_2.

(b) $y_1(x) = 0 \rightarrow$? solució de $y' = \sqrt{y}$ amb $y(0) = 0$

$$y_1'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1' \overset{?}{=} \sqrt{y_1} \rightarrow 0 = 0 \quad \text{ok} \\ y_1(0) = 0 \quad \text{ok.} \end{cases} \rightarrow y_1(x) = 0 \text{ és una solució al problema}$$

(c) $y' = y^{1/2} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = y^{1/2} \rightarrow \dfrac{dy}{y^{1/2}} = dx \rightarrow \dfrac{y^{-1/2+1}}{-1/2+1} = x + C \rightarrow 2y^{1/2} = x + C$

$y = \dfrac{x^2}{4} \leftarrow C = 0$ si $y(0) = 0 \leftarrow y = \dfrac{x^2}{4} + C \leftarrow$

És una altra solució.

Hem de notar que per $x < 0$ $\quad \dfrac{2x}{4} \neq \sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

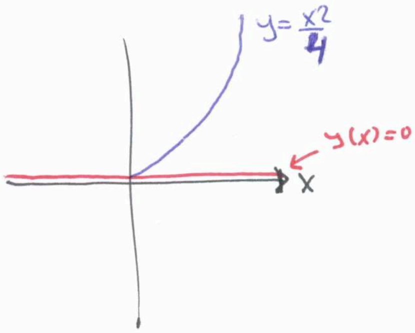
Per tant la solució $y = \dfrac{x^2}{4}$ és vàlida únicament per $x \geq 0$.

(d) Tenim que l'eq. $y' = y^{1/2}$ amb cond inicial $y(0) = 0$ té 2 solucions

$$\begin{cases} y(x) = 0 & \text{vàlida } \forall x \\ y(x) = \dfrac{x^2}{4} & \text{vàlida } x \geq 0 \end{cases}$$

El teorema enunciat a (a) no es compleix pq.

$f(x,y) = \sqrt{y} \rightarrow$ • No és una funció analítica en $(x_0, y_0) = (0,0)$ per tant la seva derivada en dit punt no està definida i per tant no té sentit ~~ni tan sols~~ demanar-se si és contínua o no. $\nexists\ \Omega$ que verifiqui les cond del teorema.



$\downarrow$

Així doncs l'eq dif amb dita cond inicial pot tenir més d'una solució (com és el cas per $x \geq 0$) com hem vist.

vàlida en un cert interval

[redacted]

Problema 2

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ serà una eq. diferenciable si i només si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \iff \exists\, \psi(x,y)$ tq
$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$
i a més a més $\partial M/\partial y$ i $\frac{\partial N}{\partial x}$ són contínues en un cert interval.

(a) Quan resulta ser no exacta, ens demanam per un $\mu = \mu(x,y)$ tq $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$.

És dir que si multiplicam tota l'eq diferencial per μ obtenim una eq. dif. exacta.

Sovint feim o assumim simplificacions com ara $\mu = \mu(x)$, aleshores, en dit cas particular:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \rightarrow \mu\, \partial_y M = \underbrace{(\partial_x \mu)}_{\mu'} N + \mu\, \partial_x N \rightarrow \mu(\partial_y M - \partial_x N) = \mu' N$$

Caldrà resoldre aquesta equació diferencial per trobar μ i comprovar que efectivament $\mu = \mu(x)$ només.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N}$$

(b) $\boxed{(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0}$ És idèntica a la 4.1 del Full #2

$M = x^2+y^2+x$, $N = xy \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = y \rightarrow$ NO és exacte

- Suposam $\mu = \mu(x) \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial_y M - \partial_x N}{N} \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{x}$ ← OK μ serà només funció de x. La nostra hipòtesi de partida és correcta

$\mu = x$ ← $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}$

- Així doncs

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu M \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = x^3 + y^2 x + x^2 \rightarrow \psi(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + h(y)$

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \mu N \rightarrow \cancel{2}y\frac{x^2}{\cancel{2}} + h'(y) = yx^2 \rightarrow h'(y) = 0 \rightarrow h(y) = Cte.$

- Per tant $\psi = cte$ és la solució és dir

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C \rightarrow y^2 = \left(C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\cdot\frac{2}{x^2}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{C}{x^2} - \frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2}}}$$

$$\boxed{y^{(IV)} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + \cos(x) + e^{-x}\sin(x)} \quad [1]$$

Problema 3.1

Semblant al 7.6 del full 4

Passos

1 - Trobar solució a la homogènia $y_h \rightarrow y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 0$

2 - Trobar solució particular a la NO homogènia: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$

2.1 - $y_{p_1} \rightsquigarrow y^{IV} + 2y''' + 2y'' = 3e^x$ [2]

2.2 - $y_{p_2} \rightsquigarrow y^{IV} + 2y''' + 2y'' = \cos(x)$ [3]

2.3 - $y_{p_3} \rightsquigarrow y^{IV} + 2y''' + 2y'' = e^{-x}\sin(x)$ [4]

3 - Adjuntar solucions: $y = y_h + y_p$

Pas 1 $y = e^{rx} \xrightarrow{[1]} r^4 + 2r^3 + 2r^2 = 0 \rightarrow r = 0$ doble, $r = -1+i$, $r = -1-i$

$$y_h = \sum_{i=1}^{4} y_{ih} \longleftarrow \left\{ y_{1h} = 1 \quad y_{2h} = x \quad y_{3h} = e^{-x}\cos(x) \quad y_{4h} = e^{-x}\sin(x) \right\}$$

$$\boxed{y_h = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}\cos(x) + C_4 e^{-x}\sin(x)}$$

Pas 2.1 Proposam solucions del tipus $y_{p_1} = Ae^x$, resulta que

$$y_{p_1} = y'_{p_1} = y''_{p_1} = y'''_{p_1} = y^{IV}_{p_1} \xrightarrow{[2]} 5A = 3 \rightarrow A = 3/5 \rightarrow \boxed{y_{p_1} = \tfrac{3}{5} e^x}$$

Pas 2.2 Proposam solucions del tipus $y_{p_2} = B\cos(x) + C\sin(x)$

$$\left.\begin{array}{ll} y'_{p_2} = -B\sin(x) + C\cos(x) & y'''_{p_2} = B\sin(x) - C\cos(x) \\ y''_{p_2} = -B\cos(x) - C\sin(x) & y^{IV}_{p_2} = B\cos(x) + C\sin(x) \end{array}\right\} \xrightarrow{[3]} \begin{array}{l} B\cos(x) + C\sin(x) + 2B\sin(x) - 2C\cos(x) \\ -2B\cos(x) - 2C\sin(x) = \cos(x) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} B - 2C - 2B = 1 \\ C + 2B - 2C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -B - 2C = 1 \\ -C + 2B = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} B = -1/5 \\ C = -2/5 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y_{p_2} = \frac{-1}{5}\cos(x) - \frac{2}{5}\sin(x)}$$

Pas 2.3 Quan tenim $g(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x) \rightarrow$ Si $\alpha + \beta i$ és arrel de multiplicitat "s" del polinomi característic de l'homogènia, sabem que davant la mescla de sin i cos i exp hem de posar x^s

Proposam: $y_{p_3} = x^1 e^{-x}(D\sin(x) + E\cos(x))$ ja que $r = -1+i$ és una arrel simple $(s=1)$

Notació: $S \equiv \sin(x)$, $C \equiv \cos(x)$

Els fulls adjunts proven que: $\longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} y'_{p_3} = e^{-x}[DS + EC + x\cdot(-DS - EC + DC - ES)] \\ y''_{p_3} = 2e^{-x}[DC - ES - DS - EC + x\cdot(-DC + ES)] \\ y'''_{p_3} = 2e^{-x}[-3DC + 3ES + x\cdot(DC - ES + EC + DS)] \\ y^{IV}_{p_3} = 2e^{-x}[4DC - 4ES + 4DS + 4EC + x\cdot(-2EC - 2DS)] \end{array}\right.$$

$y^{IV} + 2y''' + 2y''$

$$e^{-x}(4DS + 4EC) = e^{-x}\cdot S$$

$\hookrightarrow$ Per tant $D = 1/4$, $E = 0$ $\rightarrow \boxed{y_{p_3} = \frac{1}{4} x e^{-x}\sin(x)}$

Pas 3

$$\boxed{y = \underbrace{C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}\cos(x) + C_4 e^{-x}\sin(x)}_{= y_h} + \underbrace{\underbrace{\tfrac{3}{5}e^x}_{y_{p_1}} \underbrace{- \tfrac{1}{5}\cos(x) - \tfrac{2}{5}\sin(x)}_{y_{p_2}} + \underbrace{\tfrac{1}{4} x e^{-x}\sin(x)}_{y_{p_3}}}_{y_p}}$$

Derivades del problema 3.1, pas 2.3

$$y = x\, e^{-x}\,(DS + EC)$$

Notació: $S \equiv \sin(x)$, $C \equiv \cos(x)$

$$y' = e^{-x}(DS + EC) + x \cdot \left[(-1)\, e^{-x}(DS + EC) + e^{-x}(DC - ES)\right]$$

$$\boxed{y' = e^{-x}\left[DS + EC + x\left[-DS - EC + DC - ES\right]\right]}$$ ✓

$$y'' = e^{-x}\left[-DS - EC + x\left[\cancel{+DS} + \cancel{EC} - DC + ES\right]\right]$$
$$+ e^{-x}\left[DC - ES - DS - EC + DC - ES + x\left[-DC + ES \cancel{-DS} \cancel{-EC}\right]\right]$$

$$y'' = e^{-x}\left[2DC - 2ES - 2DS - 2EC + 2x\left[-DC + ES\right]\right]$$

$$\boxed{y'' = 2e^{-x}\left[DC - ES - DS - EC + x\left[-DC + ES\right]\right]}$$ ✓

$$y''' = +2e^{-x}\left[-DC + ES + \cancel{DS} + \cancel{EC} + x\left[+DC - ES\right]\right]$$
$$2e^{-x}\left[\cancel{-DS} \cancel{-EC} - DC + ES - DC + ES + x\left[+DS + EC\right]\right]$$

$$\boxed{y''' = 2e^{-x}\left[-3DC + 3ES + x\left[DC - ES + EC + DS\right]\right]}$$ ✓

$$y^{(IV)} = 2e^{-x}\left[3DC - 3ES + x\left[\cancel{-DC} + \cancel{ES} - EC - DS\right]\right]$$
$$2e^{-x}\left[+3DS + 3EC + DC - ES + EC + DS + x\left[-DS - EC \cancel{-ES} \cancel{+DC}\right]\right]$$

$$\cancel{y^{(IV)} = 2e^{-x}\left[5DC - 4ES + 3DS + 4EC + x\left[-2DC - 2DS - 2EC + DC\right]\right]}$$

$$y^{(IV)} = 2e^{-x}\left[4DC - 4ES + 4DS + 4EC + x\left[-2EC - 2DS\right]\right]$$

$$y^{(IV)} + 2y''' + 2y'' = e^{-x}\sin(x)$$

Càlcul problema 3.1, pas 2.3

$$e^{-x}\left[8DC - 8ES + 8DS + 8EC + x\left[-4EC - 4DS\right]\right]$$

$$e^{-x}\left[-12DC + 12ES + x\left[+4EC + 4DS + 4DC - 4ES\right]\right]$$

$$e^{-x}\left[4DC - 4ES - 4DS - 4EC + x\left[-4DC + 4ES\right]\right]$$

$$/ \quad / \quad 4DS + 4EC \qquad 0$$

$$\boxed{e^{-x}(4DS + 4EC) = e^{-x}\cdot S}$$

això implica que

$$D = 1/4$$
$$E = 0.$$

Llavors $y_{p_3} = \frac{1}{4}\, x \sin(x)\, e^{-x}$

$$\boxed{2y\,dx + \frac{x^2-y}{x}\,dy = 0}$$

Problema 3.2

Semblant al 6.1 del Full #1

$$-2y\,dx = \frac{x^2-y}{x}\,dy$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2-y}{2xy}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{2y} + \frac{1}{2x}$$

$$x' + \frac{1}{2y}x = \frac{1}{2}x^{-1}$$ Bernoulli amb $n=-1$.

Proposem canvi $z = x^{1-n} \to z = x^2 \to x = z^{1/2}$

$$z' = 2x\,x' \to x' = \frac{z'}{2x} = \frac{z'}{2z^{1/2}}$$

$$\frac{z'}{2z^{1/2}} + \frac{1}{2y}z^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z^{1/2}}$$

mult $z^{1/2}$ ↓

$$\frac{z'}{2} + \frac{1}{2y}z = \frac{1}{2}$$

$$z' + \frac{z}{y} = 1 \longrightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln(y)} = y$$

$$\mu\cdot\left(z' + \frac{z}{y}\right) = \mu\cdot 1$$

$$y z' + z = y$$

$$(zy)' = y$$

$$zy = \int y\,dy$$

$$zy = \frac{y^2}{2} + C \to z = \frac{y}{2} + \frac{C}{y} \xrightarrow{z=x^2} \boxed{x^2 = \frac{y}{2} + \frac{C}{y}} \to \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{y}{2} + \frac{C}{y}}}$$

$$\boxed{y^2\,dx + (x^2 - xy - y^2)\,dy = 0}$$

Problema 3.3

Idèntic al 1.3 del Full #2

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{-x^2+xy+y^2}{y^2}\right]^{-1} = \left[\frac{-1 + y/x + (y/x)^2}{(y/x)^2}\right]^{-1}$$

És una equació homogènia. Feim el canvi $z = y/x$ llavors ens queda

$$x z' + z = \left(\frac{-1+z+z^2}{z^2}\right)^{-1} \longrightarrow \left(\frac{z^2+z-1}{z-z^3}\right) dz = \frac{dx}{x}$$

És de variables separables. Per no haver de fer una integral complicada faig

$$\frac{z(1+z)-1}{z(1-z^2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1+z} = \frac{A(1-z^2)+Bz(1+z)+Cz(1-z)}{z(1-z^2)}$$

Si $z=0 \rightarrow -1 = A$

Si $z=1 \rightarrow 1 = 2B \rightarrow B = 1/2$

Si $z=-1 \rightarrow -1 = -2C \rightarrow C = 1/2$

així doncs puc reescriure l'eq diferencial com

$$\left(\frac{-1}{z} - \frac{1/2}{z-1} + \frac{1/2}{z+1}\right) dz = \frac{dx}{x}$$

integram cada costat

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z^2(z-1)}\right) = \ln(x) + C \xrightarrow{\text{elevant tot a } e} \frac{z+1}{z^2(z-1)} = K x^2$$

Desfeim el canvi $z = y/x$

$$\boxed{\frac{y+x}{y-x} = K y^2}$$

Forma implícita de la solució.