Equacions Diferencials I, curs 2010-11
Full 9

1. Trobeu en termes de les funcions de Bessel les solucions de les equacions:

$$\begin{aligned} xy'' + y' + x^2 y &= 0 \\ x^2 y'' - xy' + (1+x)y &= 0 \end{aligned}$$

2. A partir del desenvolupament en sèrie proveu que

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x)}{x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \; J_0(x\cos\theta)\cos\theta \\ \frac{1-\cos(x)}{x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \; J_1(x\cos\theta) \end{aligned}$$

3. Provau la següent relació:

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

4. Proveu per inducció:

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n J_0(x)$$

5. A partir de la funció generatriu de les funcions de Bessel

$$f(x,h) = \exp(x(h-1/h)/2) = \sum_{t=-\infty}^{t=\infty} J_t(x)\; h^t$$

demostreu que

$$1 = J_0(x)^2 + 2J_1(x)^2 + 2J_2(x)^2 + 2J_3(x)^2 + \ldots$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} \mid J_0(x) \mid &\leq 1 \\ \mid J_n(x) \mid &\leq 2^{-1/2}, \qquad\qquad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

6. Deduir el desenvolupament de Jacobi

$$e^{ix\cos\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(x) e^{im\theta}$$

[**Ajuda:** *feis servir la funció generatriu de les funcions de Bessel*]. Utilitzeu la part real d'aquest resultat per demostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{4n}(x) = \frac{1+\cos(x)}{2}$$

7. Demostreu el següent desenvolupament de les funcions trigonomètriques en termes de funcions de Bessel:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x)\\ \sin(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n-1}(x)\end{aligned}$$

8. Demostreu que entre dos zeros consecutius de $J_\nu(x)$ hi ha un, i només un, zero de $J_{\nu+1}(x)$. **Ajuda:** recordau el teorema de Rolle, i feis servir la relació de recurrència

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$