Equacions Diferencials I, curs 2010-11
Full 8

1. Resolgueu les següents equacions per desenvolupament en sèrie al voltant de l'origen:

   a) $x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0$

   b) $x^2y'' + (x + x^4)y' - y = 0$

   c) $x^2y'' + x(x-2)y' + (2-x)y = 0$. Resolgueu-la una altra vegada però ara fent servir que $y = x$ és una solució d'aquesta equació.

   d) $x(1-x)y'' - (4+x)y' + 4y = x$

2. Provau que si $n \in \mathcal{N}$ llavors

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\pi^{1/2}$$

3. Provau les següents propietats:
   (a) $a\ (a+1)\ (a+2)\ ...\ (a+n)\ =\ \Gamma(a+n+1)/\Gamma(a)$
   (b) $c\ (c+d)\ (c+2d)\ ...\ (c+nd)\ =\ d^{n+1}\ \Gamma(c/d+n+1)/\Gamma(c/d)$
   i feis-les servir per expressar l'n-essim coeficient de la següent sèrie

$$a_n = \frac{1\ 5\ 9\ 13\ ...\ (4n+1)}{2^n}$$

   en termes de la funció gamma.

4. **Exercici voluntari:** resolgueu aquestes altres equacions per desenvolupament en sèrie al voltant de l'origen.

   a) $xy'' + (x-1)y' - y = 0$

   b) $xy'' + 4y' - xy = 0$

   c) $x(1-x)y'' - 3y' + 2y = 0$. Discutiu per a quines condicions inicials $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o$ podem assegurar que hi ha una solució única. Quin és el rang de validesa de les solucions?

   d) $2xy'' + 6y' + y = 0$

   e) $xy'' + xy' + y = 0$

   f) $xy'' + (b-x)y' - ay = 0$. Discutiu les condicions en què aquesta solució es redueix a un polinomi. Considereu el cas $a = 0$ i emprau el mètode de l'ordre per a trobar una segona solució de l'equació.