

Equacions Diferencials I, curs 2010-11
Full 6

1. Trobar la solució mitjançant sèries de potències (només els primers 4 termes de cada sèrie) a l'equació diferencial:

$$y'' - xy = 0,$$

mitjançant un desenvolupament en sèrie de potències al voltant dels punts:

$$(a) \quad x_o = -2.$$

$$(b) \quad x_o = 1.$$

2. A la vista dels resultats de l'exercici anterior, contestar les següents preguntes:
- (a) Son les solucions que obtenim les mateixes quan $x_o = -2$, $x_o = 1$ o $x_o = 0$?
 - (b) Quin es el radi de convergència pel desenvolupament al voltant de $x_o = -2$, $x_o = 1$ i $x_o = 0$?
 - (c) Si vull resoldre el problema $y'' - xy = 0$ amb les condicions inicials $y(1) = 2$ i $y'(1) = 0$, quina o quines de les solucions anteriors son adequades? Justificau la resposta.
 - (d) Contradiu el resultat de l'exercici anterior el teorema d'existència i unicitat? Justificau la vostra resposta.
3. Trobar la solució general vàlida a l'entorn de l'origen de les següents equacions diferencials:

$$(a) \quad (9 + x^2)y'' - 2y = 0,$$

$$(b) \quad (1 + 2x^2)y'' + 3xy' - 3y = 0,$$

fixant també a quin interval són vàlides. Podeu fer servir la tècnica de reducció de l'ordre per trobar la segona solució.

4. Resoldre l'equació:

$$y'' + (x - 1)^2 y' - 4(x - 1)y = 0$$

per desenvolupament en sèrie al voltant del punt $x = 1$. Ajuda: el canvi $z = x - 1$ simplifica la resolució.

5. Provau que l'equació diferencial

$$x^4 y'' + x(2x^2 - 1)y' + y = 0$$

mitjançant el canvi $z = 1/x$ es transforma en una equació per a la que $z_o = 0$ és un punt ordinari. Trobau la solució en sèrie de potències al voltant de dit punt $z_o = 0$.

6. - Resolgueu la equació diferencial

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

- (a) per desenvolupament en sèrie al voltant de l'origen,
- (b) adonant-se que $y(x) = e^x$ és una solució de l'equació.

7. - Trobar la solució a l'entorn de l'origen i dir en quin interval són vàlides:

$$\begin{aligned}(a) \quad & y'' + (1 + x + x^2)y = 0, \\(b) \quad & (1 + x)y'' + 2y' - y = 0.\end{aligned}$$

8. Provau que el wronskià de les funcions d'Airy $W\{Ai(x), Bi(x)\}$ és $1/\pi$ per a tot valor de x . Ajuda: emprau la identitat d'Abel, i avaluau el wronskià per un valor de x pel que sigui fàcil calcular el valor de les funcions d'Airy $Ai(x)$ i $Bi(x)$.