

Equacions Diferencials I, curs 2010-11
Full 3

1. Determineu la solució general de les següents equacions diferencials:

1. $y''' - y'' - y' + y = 0$.
2. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$.
3. $y^{(iv)} + y = 0$.

2. Demostreu que el Wronskià de l'equació diferencial lineal d'ordre n :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x)y = 0$$

es pot expressar com:

$$w(y_1, \dots, y_n)(x) = C \exp \left[- \int^x p_1(t) dt \right]$$

3. Mostreu que si $y_1(x)$ és una solució particular de:

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0.$$

Llavors la substitució $y = y_1(x)v(x)$ porta a l'equació:

$$v''' + g_1(x)v'' + g_2(x)v' = 0,$$

que és de segon ordre en v' . Trobeu $g_1(x)$ i $g_2(x)$. Generalitzeu aquesta tècnica de reducció de l'ordre a una equació lineal d'ordre n .

4. Resoldre pel mètode del problema anterior:

- (a) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$, $y_1(x) = x$, $x > 0$.
- (b) $x^2(x+3)y''' - 3x(x+2)y'' + 6(1+x)y' - 6y = 0$, $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$, $x > 0$.

5. Determineu la solució general de les següents equacions diferencials lineals d'ordre n , i trobeu també la solució que satisfà les condicions inicials.

1. $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.
2. $y^{(iv)} - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$.
3. $y^{(iv)} - 4y''' + 4y'' = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 0$, $y'''(1) = 0$.
4. $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(\pi/2) = 2$, $y'(\pi/2) = 1$, $y''(\pi/2) = 0$.

6. Determineu la solució general de les següents equacions diferencials lineals d'ordre n . Quan es donin, trobeu també la solució que satisfà les condicions inicials.

1. $y^{(vi)} - 3y^{(iv)} + 3y'' - y = 0$.
2. $y^{(v)} - 3y^{(iv)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$.
3. $y^{(viii)} + 8y^{(iv)} + 16y = 0$.

7. Una molla de constant $k = 48\text{kg}/\text{dm}$ penja verticalment des d'un sòtil. A l'extrem inferior s'hi penja una massa de 16kg . Des de la posició d'equilibri del sistema, es desplaça cap abaix dita massa una distància de $1/6\text{dm}$ i s'amolla. Discutir el moviment de la molla si despreciam la resistència de l'aire. Justificar la resposta trobant la equació diferencial del sistema y obtenir a partir d'ella la solució al moviment.
8. Un circuit elèctric consta d'una inductància de $0,1\text{H}$, una resistència de 20 ohms i un condensador de capacitat 25 microfarads . Trobar la càrrega q i el corrent i per un instant t qualsevol per a les condicions inicials:
- a) $q=0,05\text{C}$, $i = \frac{dq}{dt} = 0$ per a $t = 0$.
 - b) $q=0,05\text{C}$, $i = -0,2\text{A}$ per a $t = 0$.