Equacions Diferencials I, curs 2010-11
Full 12

1. Trobeu la solució general del sistemes d'equacions següents i dibuixeu les trajectòries (retrat de fase).

$$(a) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad (c) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$(b) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad (d) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

2. Resolgueu els problemes de valors inicials següents:

$$(a) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3. Considereu el sistema d'equacions diferencials

$$\vec{x}' = P(t)\vec{x}$$

amb $P(t) = (P_{ij}(t))$. Demostreu que el wronskià de les solucions satisfà l'equació diferencial:

$$\frac{dW}{dt} = \left[\sum_{i=1}^{n} P_{ii}(t)\right] W$$

4. Resolgueu els sistemes següents prenent com a funció prova $\vec{x}(t) = t^r\vec{\xi}$

$$t\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} \qquad t\vec{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

5. Resolgueu el següent sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) + 2x(t) + 1y(t) - 1z(t) &= e^t \\ y'(t) - 3x(t) - 6y(t) + 5z(t) &= 1 \\ z'(t) - 3x(t) - 7y(t) + 6z(t) &= 2 \end{aligned}$$

6. Escrivint $G(t, 0) = \Phi(t)$ demostreu que:

$$\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t + s)$$
$$\Phi(t)\Phi(-t) = 1 \rightarrow \Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$$
$$\Phi(t - s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$$

7. Considereu el sistema $\vec{x}' = A\vec{x}$ a on A és una matriu constant. Demostreu que té sentit escriure el propagador com:

$$G(t, t_0) = \exp[(t - t_0)A]$$

On l'exponencial d'una matriu està definida pel desenvolupament en sèrie:

$$\exp[B] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}$$

és a dir, demostreu que $\exp[(t - t_0)A]\vec{x}(0)$ és solució de l'equació diferencial i satisfà la condició inicial. Trobau mitjançant aquest mètode el propagador del sistema d'equacions del problema 5, considerau només la part homogènia. **Ajuda: diagonalitzar la matriu**

8. Resolgueu els sistemes següents:

$$(a) \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$(b) \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

9. - Trobeu la solució general del sistemes d'equacions següents i dibuixeu les trajectòries:

$$(a) \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$(b) \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$(c) \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Exercicis d'ampliació - Fora del temari per l'examen:

1. Resolgueu els següents sistemes d'equacions diferencials per tots els mètodes que pogueu/sabeu:

$$(a) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$
$$(b) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$
$$(e) \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

2. Verifiqueu que el vector donat és solució de l'equació homogènia i llavors resolgueu l'equació no homogènia. Suposeu sempre que $t > 0$.

$$(a) \quad t\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \vec{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$$
$$(b) \quad t\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$$