Equacions Diferencials I, curs 2010-11
Full 10

1. Trobeu les solucions de les següents equacions diferencials en termes de funcions de Bessel.

$$\begin{array}{cc}
(a) & y'' + 4x^2 y = 0 \\
(b) & 4xy'' + y = 0 \\
(c) & 3xy'' + 2y' + 12y = 0 \\
(d) & y'' + xy = 0 \\
(e) & xy'' - y' + ax^2 y = 0 \\
(f) & 4xy'' + 2y' + y = 0
\end{array}$$

2. Avalueu els següents limits:

$$\begin{array}{cccc}
(a) & \text{lím}_{x\to 0} \frac{J_4(x)}{[J_2(x)]^2} & (b) & \lim\limits_{x\to 0} J_\nu(x)\cdot Y_\nu(x) \\
(c) & \text{lím}_{x\to 0} \frac{I_3(x)}{I_5(x)} & (d) & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Y_0(x^2)}{\ln x}
\end{array}$$

3. Demostrau que

$$j_n'(x) = \frac{n}{2n+1} j_{n-1}(x) - \frac{n+1}{2n+1} j_{n+1}(x)$$

4. Volem provar la relació d'ortogonalitat

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_n(x)\ j_m(x)\ dx \ = \frac{\pi}{2n+1}\delta_{n,m}$$

de les funcions de Bessel esfèriques. Per això seguiu els passos següents:
(a) Provau que donada l'equació diferencial de Bessel $x^2 J_\mu'' + xJ_\mu' + (x^2 - \mu^2)J_\mu$ hom pot escriure

$$\frac{d}{dx}\left[x\left(J_\mu' J_\nu - J_\nu' J_\mu\right)\right] + (\nu^2 - \mu^2)\frac{J_\nu J_\mu}{x} = 0$$

i a partir d'aquí,
(b) Provau fent servir el comportament asimptòtic de les funcions de Bessel que quan $\mu + \nu > -1$ llavors

$$\int_0^\infty J_\mu J_\nu \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin((\mu-\nu)\pi/2)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

(c) Provar que $j_n(-x) = (-1)^n\ j_n(x)$,
(d) Finalment fent ús de (b) i (c) provau la relació d'ortogonalitat demanada.

5. Deduir les relacions següents vàlides per a tot $n \in \mathcal{Z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{n+1} j_n(x)\right) &= x^{n+1} j_{n-1}(x) \\
\frac{d}{dx}\left(x^{-n} j_n(x)\right) &= -x^{-n} j_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

demostrau també que:

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

6. - Verifiqueu fent us de la funció generatriu

$$g(x,t) = \exp(x(t+1/t)/2) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} I_n(x)\ t^n$$

les següents propietats

$$\begin{aligned}
(a) \qquad 1 &= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x) \\
(b) \qquad \mathrm{e}^{\pm x} &= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n I_n(x) \\
(c) \quad \cosh(x) &= I_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x) \\
(d) \quad \sinh(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1}(x)
\end{aligned}$$