Capítulo 9

Ecuación de Bessel

9.1. Definición. Puntos singulares

La ecuación de Bessel, una de las más importantes en física matemática, es una ecuación diferencial lineal de orden 2,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{9.1}$$

que depende de un parámetro ν, el *orden* (¿a que es confuso que también se le llame orden?) de la ecuación diferencial. Aunque es posible que ν sea un número complejo, aquí consideraremos únicamente el caso $\nu \geq 0$, real. Como se puede escribir $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ con $p(x) = 1/x$ y $q(x) = 1 - \nu^2/x^2$,

---

9.1.1. **el teorema de existencia y unicidad nos dice que la solución se escribe como $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ y es válida, cómo mínimo, en el intervalo $(0, \infty)$. Hay otra solución con la misma estructura y funciones diferentes y_1, y_2 que es válida, al menos, en el intervalo $(-\infty, 0)$.**

Nosotros nos centraremos, de momento, en encontrar la solución válida, al menos, en el intervalo $(0, \infty)$.

9.1.2. **Como $x_0 = 0$ es un punto singular regular, el método de Frobenius nos asegura que la solución se puede encontrar probando una solución de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ donde la serie tiene radio de convergencia infinito. Aquí puede aplicar toda la casuística que hemos detallado en la clase anterior para encontrar la segunda solución.**

Antes de encontrar la solución para ν arbitrario, vamos a hacer primero el caso $\nu = 0$.

9.2. Ecuación de Bessel para $\nu = 0$

Reemplazando la función prueba $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ en la ecuación de Bessel con $\nu = 0$: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu)^2 y = 0$ obtenemos

9.2.1.

$$\begin{aligned} a_0 F(r) &= 0 \\ a_1 F(r+1) &= 0 \\ a_n F(r+n) + a_{n-2} &= 0, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Siendo la función $F(r) = (r - \nu)(r + \nu)$.

Nos ponemos ahora en el caso $\nu = 0$, para el que las dos raíces de la ecuación indicial $F(r) = r^2 = 0$ son $r_1 = r_2 = 0$, raíz doble y por tanto, sólo podremos encontrar, de momento, la primera solución $y_1(x)$. Tomando $r = r_1 = 0$ tenemos que a_0 es arbitrario, que $a_1 = 0$ y que $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$.

9.2.2. La solución de la relación de recurrencia es

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= 0 \\ a_{2m} &= \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} a_0, \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Tomando $a_0 = 1$ obtenemos la serie para $y_1(x)$ que se escribe $J_0(x)$ y llama función de Bessel de 1ª especie de orden 0:

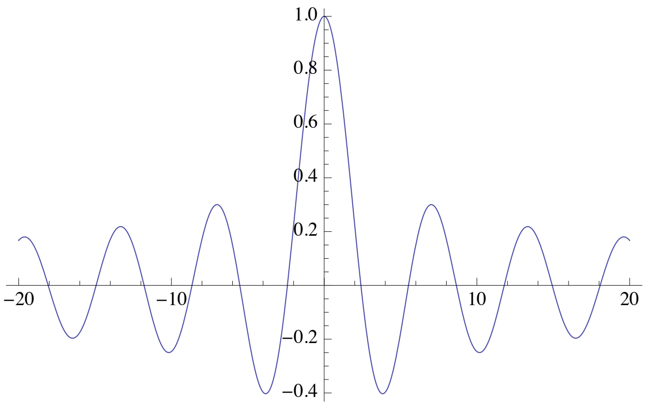
$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}. \tag{9.2}$$

9.2.3. La serie es válida para $x \in (-\infty, \infty)$ y tiene radio de convergencia infinito.

Como sólo salen potencias pares de x es una función par $J_0(-x) = J_0(x)$. Su aspecto es el de una función oscilatoria que tiene su máximo en $J_0(0) = 1$, y es decreciente para $|x|$ creciente.

In[10]:= `Plot[BesselJ[0, x], {x, -20, 20}]`

Out[10]=



9.3. La segunda solución para $\nu = 0$

Como estamos en el caso $r_1 = r_2$ para encontrar la segunda solución hemos de resolver la relación de recurrencia para encontrar $a_n(r)$ para un valor de r arbitrario. En este caso no es demasiado difícil de hacer: Si escribimos la relación de recurrencia para el logaritmo de $|a_n(r)|$ podemos deducir

9.3.1.

$$\ln |a_{2m}(r)| = -2 \sum_{k=1}^{m} \ln(2k + r)$$

y la derivada es

$$\frac{da_{2m}(r)}{dr} = -2a_{2m}(r) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k + r}, m \geq 1$$

y reemplazando ahora $r = 0$ tenemos

$$a'_{2m}(0) = \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} a_0, m \geq 1$$

donde $H_0 = 0, H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, m \geq 1$ es la llamada sucesión armónica.

La segunda solución de la ecuación de Bessel es así:

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

válida sólo para $x > 0$. Por motivos que no vienen ahora al caso, esta función no tiene nombre, pero sí lo tiene $Y_0(x)$ que es la función de Bessel de 2ª especie de orden 0

definida como:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)\right]$$

con $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = 0{,}5772156649015329...$, la llamada constante de Euler. La función $Y_0(x)$ está definida sólo para $x > 0$ y la hemos dibujado un poco más adelante.

La solución completa de la ecuación de Bessel de orden cero se escribe como:

$$y(x) = \begin{cases} c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x) & \text{if } x > 0, \\ c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(-x) & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

No es raro que una condición auxiliar en un problema de física sea que la solución sea finita en todo punto, incluido $x = 0$, lo que hace que $c_2 = 0$.

9.4. Ecuación de Bessel de orden ν arbitrario

En este caso las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. La diferencia entre las dos es $r_1 - r_2 = 2\nu$. Si $\nu \neq 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$, entonces no hay ningún problema en encontrar las dos soluciones $y_1(x), y_2(x)$. Expliquemos el final de la película: si $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ entonces se verifica la relación de consistencia y también es fácil encontrar las dos soluciones. Sólo en el caso $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tendremos que trabajar algo más para encontrar la segunda solución $y_2(x)$.

Empecemos por encontrar las soluciones cuando $\nu \neq 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$.

9.4.1. En este caso, los coeficientes a_n para la primera solución y_1 correspondiente a $r_1 = \nu$ son:

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= 0 \\ a_{2m} &= \frac{(-1)^m \Gamma(1+\nu)}{2^{2m} m! \Gamma(m+1+\nu)} a_0 \end{aligned}$$

Por convenio, tomamos $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$ lo que da una serie para $y_1(x)$ que se conoce como función de Bessel de primera especie de orden ν:

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}. \tag{9.3}$$

9.4.2. Esta serie tiene un radio de convergencia infinito y es válida para todo x.

Para encontrar la segunda solución $y_2(x)$ realmente no hace falta repetir nada, basta con copiar la fórmula anterior poniendo $-\nu$ en vez de ν ya que la serie (9.3) está perfectamente bien definida siempre que $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$ (hay unas singularidades de la función gamma en esos puntos, véase más adelante). Esto nos dice que la solución de la ecuación de Bessel es $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ si $\nu \neq 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \ldots$.

Si $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ vamos a ver que se cumple la relación de consistencia. El problema vendría al intentar calcular $a_{2\nu}$. Para ser concretos, tomemos $\nu = 7/2$.

9.4.3. **Hasta llegar a $N = 7$ no hay ningún problema y se puede ver sin ninguna dificultad que $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Al calcular a_7 sale la relación $0a_7 + a5 = 0$, pero como $a_5 = 0$ esta relación se cumple siempre. Este razonamiento se extiende sin ningún problema a todo $\nu = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$.**

Según lo explicado en la clase anterior, basta con tomar $a_N = 0$ con $N = 2\nu$. Pero esto es lo que habíamos hecho al calcular $J_{-\nu}(x)$ con lo que la segunda solución es, otra vez, $J_{-\nu}(x)$. Por lo que completamos que la solución de la ecuación de Bessel es $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ si $\nu \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Podemos corroborar que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones linealmente independientes calculando el wronskiano que resulta ser:

9.4.4.

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = \frac{-2\sin(\pi\nu)}{\pi x}, \tag{9.4}$$

que es distinto de 0 si $\nu \neq 1, 2, 3, \ldots$.

Queda ahora el caso $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ (el caso $\nu = 0$ ya se hizo antes). Aquí se puede ver que no se satisface la relación de consistencia y no es posible calcular el coeficiente a_N para $N = 2\nu$. Disponemos siempre de la primera solución $J_\nu(x)$ y podríamos usar la teoría general para encontrar la segunda solución y_2, lo que es un cálculo muuuuy engorroso. Sin embargo, hay una manera alternativa que reduce algo la complejidad del cálculo. Consiste en lo siguiente: Intentemos usar la misma serie (9.3) para calcular $J_{-\nu}(x)$ con $\nu = 1, 2, 3 \ldots$. Para concretar, supongamos que $\nu = 3$, entonces:

$$J_{-3}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-3}}{0!\Gamma(-2)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}}{1!\Gamma(-1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{1}}{2!\Gamma(0)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{3}}{3!\Gamma(1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{5}}{4!\Gamma(2)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{7}}{5!\Gamma(3)} -$$

pero $|\Gamma(-2)| = |\Gamma(-1)| = |\Gamma(0)| = \infty$, por lo que los tres primeros términos se anulan y en los siguientes reconocemos la serie de $J_3(x)$ (cambiada de signo): $J_{-3}(x) = -J_3(x)$. Resultado que se generaliza fácilmente a $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ si $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ahora entendemos perfectamente por qué $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$ no es solución si $\nu = 0, 1, 2, 3$: las dos funciones J_ν y $J_{-\nu}$ son proporcionales, lo que ya sabíamos porque su wronskiano es 0, según (9.4).

El truco que simplifica algo el cálculo de la segunda solución consiste en introducir la llamada función de Bessel de segunda especie (o función de Weber):

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$$

(en algunos libros se la denomina también como función de Neumann y se escribe $N_\nu(x)$). Si $\nu \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ esto es una combinación lineal perfectamente bien comportada de funciones de Bessel. Si $\nu = n \in \mathcal{N}$, número natural, entonces la expresión es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que puede resolverse mediante la regla de l'Hôpital:

$$Y_n(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\cos(\pi\nu)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}}{\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sin(\pi\nu)\right]_{\nu=n}}$$

9.4.5.

y que puede reducirse a:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}$$

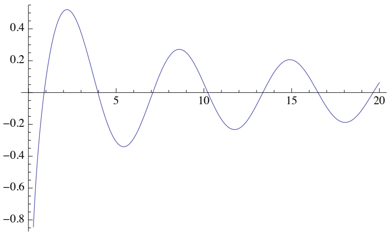
Ahora hay que hacer las derivadas de la función de Bessel J_ν respecto al orden ν. Según (9.3) el orden sale en x^ν cuya derivada es $\frac{\partial x^\nu}{\partial\nu} = x^\nu \ln x$, y en la función $\Gamma(m+1+\nu)$ cuya derivada es algo más complicada. El resultado final es:

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{2}{\pi}\left[\gamma + \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{H_{m+n}+H_m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} - \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \end{aligned}$$

pero una imagen vale más que mil palabras:

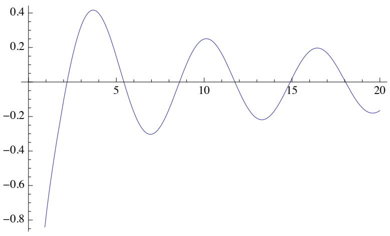
In[12]:= `Plot[BesselY[0, x], {x, 0, 20}]`

Out[12]=



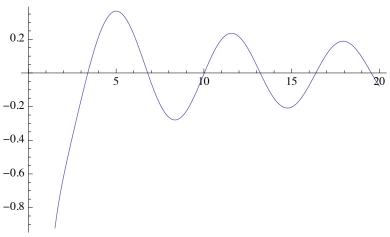
In[13]:= `Plot[BesselY[1, x], {x, 0, 20}]`

Out[13]=



In[10]:= `Plot[BesselY[2, x], {x, 0, 20}]`

Out[10]=



In[15]:= `Plot[{BesselY[0, x], BesselY[1, x], BesselY[2, x]}, {x, 0, 20}]`

Out[15]=