Capítulo 4

4.1. Problema no homogéneo

El problema no homogéneo (3.5-3.6) se puede resolver si **(1)** hemos resuelto primero el problema homogéneo y hemos encontrado un conjunto fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ de (3.7) y **(2)** hemos encontrado una solución particular $y_p(x)$ que satisface $\mathbf{L}[y_p] = g$.

4.1.1. En ese caso podemos montar la familia de soluciones $y(x) = y_p(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i y_i(x)$ y determinar las constantes $c_1, \ldots, c_n$ de manera que se satisfagan las condiciones iniciales (3.8).

¿Cómo se encuentra una solución particular que satisfaga $\mathbf{L}[y_p] = g$? Hay dos maneras de hacerlo. Una se conoce con el nombre de **coeficientes indeterminados** y es una manera pomposa de decir que "probando". La otra manera se conoce con el nombre de **variación de los parámetros** y es más poderosa que la técnica de coeficientes indeterminados, pero requiere el conocimiento previo del conjunto fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

4.1.2. Demostrad que el problema $2x^2y'' + 3xy' - y = x, y(1) = 1, y'(1) = 0$ tiene solución única. Determinar el rango mínimo de validez la solución. Demostrar que $y_p(x) = x/2$ es una solución particular y encontrad la solución única y su rango real de validez.

4.2. Método de coeficientes indeterminados

Se trata, como ya se ha dicho, de probar utilizando algo de lógica y algo de intuición. Por ejemplo, si queremos encontrar una solución particular de la ecuación $\mathbf{L}[y] = 2x^2y'' + 3xy' - y = x + x^2$ podemos intuir que será un polinomio y, ya que la potencia máxima en el lado derecho es x^2 y en el lado izquierdo hay una derivada segunda, nos parece que será suficiente probar $y_p(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

4.2.1. Substituyendo en la ecuación sale

$$\mathbf{L}[b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0] = 35b_4x^4 + 20b_3x^3 + 9b_2x^2 + 2b_1 - b_0 = x + x^2$$

igualando potencias de x obtenemos $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 1/9, b_1 = 1/2, b_0 = 0$, y la solución particular es $y_p(x) = x^2/9 + x/2$ que es válida $\forall x$.

A partir de aquí, podemos montar la familia general de soluciones $y(x) = c_1\sqrt{x} + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{9} + \frac{x}{2}$. Las constantes c_1, c_2 se encuentran con condiciones adicionales adecuadas.

No vamos a dar demasiadas recetas para proponer funciones adecuadas, pero sí que mencionaremos el caso del oscilador armónico forzado (cambiamos a una notación $x(t)$):

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = f\sin(\Omega t) \tag{4.1}$$

4.2.2. El conjunto fundamental de soluciones para $\gamma < \omega_0$ es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\gamma t}\cos(\omega t) \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

con $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Si la condición inicial es $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$, conviene escribir la solución completa como $x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$, siendo C y φ constantes a determinar. Se encuentra

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x_0' + \gamma x_0}{\omega}\right)^2}, \qquad \tan(\varphi) = \frac{x_0\omega}{x_0' + \gamma x_0}$$

Esta solución es un movimiento oscilatorio amortiguado.

En el caso $\gamma \geq \omega_0$, sigue siendo un movimiento amortiguado, pero las oscilaciones desaparecen.

Para encontrar una solución del problema no homogéneo probamos una solución particular $x_p(t) = A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$.

4.2.3. La sustitución en (4.1) da:

$$A = f\frac{\omega_o^2 - \Omega^2}{4\gamma^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}, \qquad B = \frac{-2f\gamma}{4\gamma^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}.$$

También es posible escribir la solución particular como $x(t) = R\sin(\Omega t + \Phi)$, con

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{f}{\sqrt{4\gamma^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}, \qquad \tan(\Phi) = \frac{B}{A} = \frac{-2\gamma}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

La solución del problema de oscilador forzado es, pues,

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi) + R\sin(\Omega t + \Phi)$$

ahora habría que encontrar C y φ imponiendo la condición inicial, pero ya no lo haremos. Sí que conviene destacar que cuando $t \to \infty$ la primera parte de la solución tiende a cero y nos quedamos con $x(t) = R\sin(\Omega t + \Phi)$. De manera que el oscilador oscila con la frecuencia del forzamiento, no con la frecuencia propia. Es ilustrativo dibujar la amplitud R de las oscilaciones con respecto a la frecuencia del forzamiento externo Ω.

4.2.4. Esta amplitud tiene un máximo cuando $\Omega = \omega_0$, lo que se conoce como condición de resonancia.

4.3. Método de variación de los parámetros

Este es un método muy potente que nos permite clasificar de "trivial" (en el sentido matemático) el problema de calcular una solución particular $y_p(x)$ del problema no homogéneo cuando se conoce un conjunto fundamental de soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. El método se aplica no sólo a cualquier ecuación lineal, no necesariamente de coeficientes constantes. Se basa en escribir $y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)y_i(x)$ y elegir las funciones desconocidas $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ de manera que $y_p(x)$ satisfaga la ecuación diferencial (3.5). Recordemos que sólo nos hace falta una solución particular $y_p(x)$, por lo que tenemos una gran libertad al escoger las funciones $u_i(x)$. Esa libertad la usaremos para ir simplificando las distintas expresiones que salen. Empecemos por la primera derivada: $y_p' = \sum_{i=1}^{n}(u_i'y_i + u_iy_i')$. Para simplificar esta expresión pedimos que las funciones u_i satisfagan

$$\sum_{i=1}^{n} u_i'y_i = 0 \tag{4.2}$$

con lo que $y_p' = \sum_{i=1}^{n} u_iy_i'$. Hacemos ahora la derivada segunda, $y_p'' = \sum_{i=1}^{n}(u_i'y_i' + u_iy_i'')$ y volvemos a simplificar imponiendo:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i'y_i' = 0 \tag{4.3}$$

por lo que $y_p'' = \sum_{i=1}^n u_i y_i''$. Repetimos este proceso hasta llegar a

$$\sum_{i=1}^{n} u_i' y_i^{(n-2)} = 0 \tag{4.4}$$

con lo que nos aseguramos que $y_p^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n u_i y_i^{(n-1)}$. Hacemos la última derivada $y_p^{(n)} = \sum_{i=1}^n (u_i' y_i^{(n-1)} + u_i y_i^{(n)})$. Como ya tenemos $n-1$ equaciones (4.2)$\cdots$(-4.4) no podemos hacer más simplificaciones y hay que imponer como última condición que se verifique la ecuación diferencial $\mathbf{L}[y_p] = g$.

4.3.1. Escribamos esta ecuación como $y_p^{(n)} + \sum_{j=1}^n p_j(x) y^{(n-j)} = g(x)$.

Sustituimos $y_p^{(n)} = \sum_{i=1}^n (u_i' y_i^{(n-1)} + u_i y_i^{(n)})$, $y_p^{(n-j)} = \sum_{i=1}^n u_i y_i^{(n-j)}$ para $j = 1, \ldots, n$ para obtener:

$$\begin{aligned} g(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (u_i' y_i^{(n-1)} + u_i y_i^{(n)}) + \sum_{j=1}^n p_j \left[\sum_{i=1}^n u_i y_i^{(n-j)}\right] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n u_i \left[y_i^{(n)} + \sum_{j=1}^n p_j y_i^{(n-j)}\right] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i' y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{L}[y_i] \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i' y_i^{(n-1)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde hemos usado que $\mathbf{L}[y_i] = 0$. Por tanto, la ecuación que falta es $\sum_{i=1}^n u_i' y_i^{(n-1)} = g$. Podemos escribir esta ecuación y las $n-1$ anteriores (4.2)$\cdots$(-4.4) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \cdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Este sistema siempre tiene solución única para las $u_i'(x)$ porque el determinante de la matriz es el wronskiano $W(x)$ que sabemos que es diferente de cero. Una vez hayamos encontrado $u_i(x)$ lo único que queda por hacer es integrar con respecto a x para obtener $u_i(x)$ y la solución particular $y_p(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) y_i(x)$. El proceso no presenta mayor dificultad desde el punto de vista conceptual pero puede ser laborioso en la práctica. Por ello, el método de los coeficientes indeterminados se considera más práctico en la mayoría de casos en los que es aplicable.

Veamos un ejemplo, sea la ecuación $y''' - y'' - y' + y = e^x$.

4.3.2. Un conjunto fundamental de soluciones es $y_1(x) = e^x, y_2 = xe^x, y_3(x) = e^{-x}$. La matriz wronskiana es:

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

La solución de la ecuación (4.6) con $g(x) = x$ es:

$$u_1'(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}, \quad , u_2'(x) = \frac{1}{2}, \quad , u_3'(x) = \frac{e^{2x}}{4} \tag{4.8}$$

Con lo que una solución particular es $u_p(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\right) e^x$. Al montar la solución general $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + y_p$ nos damos cuenta de que parte de la solución homogénea se puede ir a las constantes c_1, c_2, c_3 y se puede escribir sencillamente:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{4} x^2 e^x$$

4.3.3. ¿Qué función de prueba se hubiera usado para el método de coeficientes indeterminados? Resolver la ecuación diferencial usando ese método y comparad resultados.