Capítulo 3

3.1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior a 1

Se trata de encontrar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y = g(x) \tag{3.1}$$

con las condiciones adicionales adecuadas. Como va a salir muchas veces una expresión como esta, vamos a introducir una notación. Llamaremos "operador" $\mathbf{L}$ a una aplicación del espacio de funciones en sí mismo, definido como:

$$\mathbf{L}[y] \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y \tag{3.2}$$

o, en forma simbólica,

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &\equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_2(x)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x) \\ &= \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(x)\frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

De manera que la ecuación diferencial se escribe

$$\mathbf{L}[y] = g(x) \tag{3.4}$$

La ecuación $\mathbf{L}[y] = 0$ se llama la ecuación homogénea asociada a la ecuación anterior. Veremos que las técnicas de resolución de (3.4) pasan por resolver la ecuación homogénea.

¿Qué condiciones adicionales hemos de dar para poder afirmar que la ecuación tiene solución única? Intuitivamente, al haber una derivada de orden n y cada derivada "perder" una constante, pensamos que la familia de soluciones general implicará n constantes arbitrarias y hará falta n condiciones adicionales. Típicamente, esas condiciones adicionales se consiguen pidiendo que la función y $n-1$ derivadas tomen valores determinados en un punto x_0: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, siendo

$y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{n-1}$ números prefijados. ¿Es esto suficiente? El teorema de existencia y unicidad en este caso lineal dice:

Teorema: Si las funciones $p_i(x), i = 1, \ldots, n$ y $g(x)$ son funciones continuas en un intervalo que contiene al punto de la condición inicial $(\alpha, \beta) \ni x_0$ entonces existe una y sólo una función $y(x)$ definida al menos para todo punto $x \in (\alpha, \beta)$ tal que satisface:

$$\mathbf{L}[y] = g \tag{3.5}$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{3.6}$$

Es importante que se asegura la existencia de la solución, al menos, en todo el intervalo (α, β) en que las funciones $p_i(x), i = 1, \ldots, n$ y $g(x)$ son continuas, aunque pudiera ser válida más allá de este intervalo.

3.1.1. **Dada la ecuación diferencial $x(x-1)y^{(iv)} + e^x y'' + 4x^2 y = 0$ con condiciones iniciales $y(2) = y'(2) = y''(2) = y'''(2) = 1$ ¿dónde está asegurada la existencia de solución única? ¿Qué puede pasar si la condición inicial es $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$?**

Lo que hace sencillo resolver una ecuación diferencial lineal es el principio de superposición válido para la ecuación homogénea. En concreto, dice que si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_M(x)$ son funciones soluciones de la ecuación homogénea, entonces también lo es la combinación lineal $\sum_{i=1}^{M} c_i y_i(x)$, siendo c_i constantes arbitrarias.. En fórmulas:

3.1.2.

$$\mathbf{L}[y_i] = 0, i = 1, \ldots, M \Longrightarrow \mathbf{L}\left[\sum_{i=1}^{M} c_i y_i\right] = 0$$

Por tanto, lo que tenemos que hacer para resolver el problema (3.5-3.6) es encontrar (como podamos) n soluciones $y_1(x), \ldots, y_n(x)$; montar la familia de soluciones de (3.5) como $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ y buscar las n constantes $c_1, \ldots, c_n$ que permitirán satisfacer las n condiciones auxiliares (3.6). Este programa tendrá éxito si es posible resolver las n ecuaciones ordinarias (no diferenciales):

$$\begin{array}{rcl}
y_0 & = & c_1 y_1(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) \\
y'_0 & = & c_1 y'_1(x_0) + \cdots + c_n y'_n(x_0) \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_0^{n-1} & = & c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0)
\end{array}$$

o en forma matricial más bonita:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \dots \\ y_0^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones nos tiene que permitir encontrar la solución única al problema. Para ello es necesario y suficiente que el determinante de la matriz anterior sea distinto de cero. Una notación equivalente es pedir que la función llamada **determinante wronskiano** $W(x)$ y definida como:

$$W(x) \equiv W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

sea distinta de cero en el punto x_0, $W(x_0) \neq 0$. Esto concluye nuestro estudio del problema homogéneo:

3.1.3. Difícil: El wronskiano satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{dW}{dx} = -p_1(x)W(x)$$

de solución $W(x) = W(x_0)\exp[-\int_{x_0}^{x} ds\, p_1(s)]$ Por tanto, si el wronskiano es cero en $x = x_0$, entonces es cero para todo valor de $x \in (\alpha, \beta)$.

3.1.4. Si dos funciones $y_1(x), y_2(x)$ tienen un wronskiano igual a cero $W(x) = W[y_1, y_2] = 0$ entonces se puede afirmar que son proporcionales: $y_2(x) = Cy_1(x)$ para alguna constante C. Analógamente, si el wronskiano de M funciones $y_1(x), \dots, y_M(x)$ es igual a cero, entonces se puede afirmar que son linealmente dependientes, es decir, existen M constantes $C_i, i = 1, \dots, M$ no todas iguales a cero, tales que $\sum_{i=1}^{M} C_i y_i(x) = 0$.

Resumen: Para resolver el problema homogéneo:

$$\mathbf{L}[y] = 0 \tag{3.7}$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', y''(x_0) = y_0'', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{3.8}$$

basta con encontrar n soluciones $y_1(x), \dots, y_n(x)$ linealmente independientes (de wronskiano no igual a cero). Cuando las tengamos escribimos $y(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i y_i(x)$ y encontramos las constantes c_i de manera que se satisfagan las condiciones iniciales (3.8). Cómo se encuentra **el conjunto fundamental (o base) de soluciones** $y_1(x), \dots, y_n(x)$ es lo que explicaremos en las próximas clases.

3.1.5. Demostrad que el problema $2x^2y'' + 3xy' - y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$ tiene solución única. Determinar el rango mínimo de validez la solución. Demostrar que $y_1(x) = \sqrt{x}, y_2(x) = 1/x$ son un conjunto fundamental de soluciones y encontrad la solución única y su rango real de validez.

3.2. Conjunto fundamental de soluciones para ecuaciones lineales a coeficientes constantes

Se trata de la ecuación

$$\mathbf{L}[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

como las constantes a_i son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$, sabemos que esta ecuación tiene solución válida en todo $\mathbb{R}$ para cualquier condición inicial. Como la única función cuya derivada es proporcional a la función es la exponencial, lo lógico es ver si podemos conseguir un conjunto fundamental de soluciones usando sólo funciones exponenciales e^{rx}. Trabajemos con un problema concreto y luego generalizaremos.

3.2.1. Substituir $y(x) = e^{rx}$ en la ecuación $y'' + 5y' + 6y = 0$ para encontrar la ecuación característica $r^2 + 5r + 6 = 0$. Las soluciones son $r_1 = -2$ y $r_2 = -3$. Cada una da lugar a una solución $y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-2x}, y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-3x}$. El wronskiano es $W[x] = -e^{-5x} \neq 0$. La solución general es $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$.

Si la ecuación característica tiene raíces múltiples, algunas de las funciones $y_i(x) = e^{r_i x}$ serán iguales y no pueden considerarse un conjunto fundamental de soluciones. En este caso, hay un procedimiento sencillo para obtener las soluciones adicionales que hacen falta. Veamos un ejemplo.

3.2.2. Sea $y''+2y'+y = 0$ y substituyamos $y(x) = e^{rx}$ lo que da $r^2+2r+1 = 0$ o $r = -1$ raíz doble.

Sólo tenemos una solución $y_1(x) = e^{-x}$. La otra solución se consigue mediante el procedimiento de **reducción del orden**. Hagamos un cambio de variables $y(x) = v(x)y_1(x)$.

3.2.3. La ecuación resultante para $v'(x)$ es lineal de primer orden y la solución es $v(x) = ax + b$ siendo a, b constantes.

Esto nos da para $y(x)$ la familia de soluciones $(ax+b)e^{-x}$. Como sólo nos hace falta una segunda solución $y_2(x)$ (y no toda una familia de soluciones) elegimos $a=1, b=0$, que es lo más sencillo y da $y_2(x) = xe^{-x}$.

3.2.4. **$y_2(x) = xe^{-x}$ es claramente linealmente independiente de $y_1(x) = e^{-x}$ (se puede calcular el wronskiano).**

La solución general es $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$ y las constantes c_1, c_2 se encuentran mediante las condiciones iniciales correspondientes.

Si hay raíces complejas se puede proceder igual, pero conviene recordar que la solución final ha de ser real, de manera que esto exige algo de cuidado al buscar las constantes indeterminadas. Es más sencillo utilizar la expresión trigonómetrica de la exponencial $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

3.2.5. **Veamos un ejemplo: para $y'' + y' + y = 0$ la sustitución $y(x) = e^{rx}$ lleva a la ecuación característica $r^2+r+1 = 0$ de raíces $r_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, r_2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$,**

de manera que el conjunto fundamental de soluciones es $y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-x/2}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + i\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\right.$ $e^{r_2 x} = e^{-x/2}\left(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - i\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$. Podemos formar las combinaciones lineales $Y_1 = \frac{y_1+y_2}{2} = e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), Y_2 = \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

3.2.6. **Por el principio de superposición Y_1, Y_2 son también soluciones de la ecuación diferencial y su wronskiano no es cero.**

La solución general la podemos escribir entonces como $y(x) = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = e^{-x/2}(c_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$. Todavía hay otra manera de escribir esta solución. Si definimos C y ϕ mediante las relaciones $c_1 = C\cos\phi, c_2 = -C\sin\phi$,

3.2.7. **podemos despejar $C = \sqrt{c_1^2+c_2^2}, \phi = \tan^{-1}(-c_2/c_1)$, y escribir la solución como**

$$y(x) = Ce^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \phi\right)$$

donde C y ϕ son ahora las dos constantes arbitrarias a determinar mediante la condición inicial.

3.2.8. **También se puede escribir la ecuación general como $y(x) = Ce^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \varphi\right)$, con constantes C y φ adecuadas.**

Recapitulemos el caso general de ecuaciones lineales de orden 2 a coeficientes constantes $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$.

3.2.9. **Substituyendo $y(x) = e^{rx}$, la ecuación característica $a_2r^2+a_1r+a_0 = 0$ puede:**
(i) tener raíces distintas r_1, r_2. La solución es $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$.
(ii) tener raícies iguales $r_1 = r_2 = r$. La solución es $y(x) = e^{rx}(c_1 + c_2x)$.
(iii) tener raíces complejas $r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu$. La solución se puede escribir de dos formas equivalentes $y(x) = e^{\lambda x}(c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x))$ o $y(x) = Ce^{\lambda x}\cos(\mu x + \phi)$.

Principios muy parecidos se aplican a la ecuación lineal a coeficientes constantes de orden $n > 2$: $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$.

3.2.10. **La sustitución $y = e^{rx}$ lleva a la ecuación característica $a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 =$.**

(i) Si todas las raíces $r_1, \ldots, r_n$ son distintas la solución és $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_1e^{r_ix}$.

3.2.11. **(ii) Si una raíz tiene multiplicidad s, las correspondientes s soluciones linealmente independientes son $e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, \ldots, x^{s-1}e^{rx}$.**

(iii) En el caso de que haya una pareja $\lambda \pm i\mu$ de raíces complejas, las soluciones correspondientes se pueden agrupar como $e^{\lambda x}(c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x))$ ó $Ce^{\lambda x}\cos(\mu x + \phi)$ ó $Ce^{\lambda x}\sin(\mu x + \varphi)$.