Capítulo 2

2.1. Teorema de existencia y unicidad

Nos preguntamos en qué condiciones podemos asegurar que un problema de condiciones iniciales de primer orden lo más general posible:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,y), \\ y(x_0) & = & y_0, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

tiene solución única. Un teorema viene a resolver la mayoría de casos prácticos:

Teorema: Si existe un rectángulo $\Omega = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ que contiene a la condición inicial,$(x_0, y_0) \in \Omega$ y tal que $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuas en Ω entonces el problema (2.1) tiene una solución única $y(x)$ que es válida al menos en algún intervalo (x_1, x_2) que está contenido en (α, β).

El enunciado del teorema está muy destilado y dice lo que dice y no dice lo que no dice, ni más ni menos. Vamos a ver ejemplos del teorema. Cuando resolvimos el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & x^3 y^2, \\ y(0) & = & 1, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

encontramos la solución única $y(x) = \dfrac{4}{4 - x^4}$. Según las condiciones del teorema, $f(x,y) = x^3 y^2$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2 y$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$ y esperábamos efectivamente que hubiera solución única ya que, obviamente, la condición inicial satisface $(x_0, y_0) \in \Omega = \mathbb{R}^2$. Lo que el teorema no nos dice es en qué intervalo (x_1, x_2) es válida la solución. El método explícito de encontrar la solución nos dice *a posteriori* que la solución es válida en $-2 < x < 2$ y en ningún sitio más.

El intervalo de validez de la solución puede cambiar drásticamente para una misma ecuación diferencial si cambiamos la condición inicial.

2.1.1. Si, en el ejemplo anterior, imponemos la condición inicial $y(0) = -1$, la solución es válida ahora $\forall x$.

En el caso de una ecuación diferencial lineal $y' + p(x)y = g(x)$, o sea $f(x,y) = -p(x)y + g(x)$, el teorema se puede refinar un poco más:

Teorema: Si $f(x,y) = -p(x)y + g(x)$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas en el intervalo (α, β) que contiene a x_0, entonces el problema de valores iniciales (2.1) tiene una solución única que es válida al menos para $x \in (\alpha, \beta)$.

La novedad es que ahora podemos afirmar que la solución única $y(x)$ es válida, al menos, para todo aquel intervalo de valores de x en el que $p(x)$ y $g(x)$ son continuas.

Una vez que se ha determinado que un problema tiene una solución única, es muy común que hagamos enfasis en encontrar la familia de soluciones y no tanto en imponer la condición inicial que se considera, poco más o menos, que una cosa trivial (y casi siempre lo es). Por eso, en las ecuaciones diferenciales que estudiaremos a continuación no nos preocuparemos en la mayoría de casos de imponer la condición inicial. Eso no quiere decir que no haya que hacerlo. Sólo que en este curso no perderemos tiempo haciéndolo.

2.2. Ecuación de Bernouilli

Tiene la forma

$$y' + p(x)y = g(x)y^n, \tag{2.3}$$

con $n \neq 1$

2.2.1. Resolver la ecuación de Bernouilli si $n = 1$.

Ya Bernouilli nos enseñó el camino: hagamos el cambio de variables $z = y^{1-n}$.

2.2.2. Esto lleva a la ecuación lineal:

$$z' + \hat{p}(x)z = \hat{g}(x), \tag{2.4}$$

con $\hat{p}(x) = (1-n)p(x)$, $\hat{g}(x) = (1-n)g(x)$, que se resuelve por la técnica del capítulo 1.4 para encontrar $z(x)$. Luego se deshace el cambio de variable para encontrar $y(x)$.

2.3. Ecuaciones homogéneas

Hay que ir con cuidado porque la palabra "homogénea" quiere decir muchas cosas en matemáticas (y también en el campo de las ecuaciones diferenciales). Hoy, "homogénea" quiere decir que la ecuación diferencial tiene la forma:

$$y' = f(y/x). \tag{2.5}$$

Por ejemplo $y' = \sin(y/x)$. No siempre es tan fácil darse cuenta a primera vista de si una ecuación diferencial es homogénea.

2.3.1. Demostrar que

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2 + y^2} \tag{2.6}$$

es homogénea y encontrar la función f.

Las ecuaciones homogéneas se resuelven mediante el cambio de variables (que parece hasta obvio) $z = y/x$.

2.3.2. Esto lleva a:

$$z' = \frac{f(z) - z}{x} \tag{2.7}$$

que es separable:

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}, \tag{2.8}$$

y que se puede integrar sin más (bueno, hay que saber integrar, pero eso es cosa de otro curso). Luego se deshace el cambio de variable.

2.3.3. Demostrar que la familia de soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \tag{2.9}$$

es $y(x) = \dfrac{Cx^2}{1 - Cx}$.

2.4. Nota sobre derivadas parciales

Sea una variable independiente x, una función de una variable $y(x)$ y otra función de dos variables $f(x, y)$. Por ejemplo $y(x) = x^2$, $f(x, y) = 2xy + 3y^2$. Podemos pensar que f es una función de dos variables independientes o bien que al substituir y for $y(x)$, la función f se convierte en una función $f(x) \equiv f(x, y(x))$, función sólo de x. En el caso anterior $f(x) = 2x(x^2) + 3(x^2)^2 = 2x^3 + 3x^4$. Como función de x y de y se pueden hacer derivadas parciales respecto a una variable manteniendo la otra constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2y \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x + 6y \tag{2.11}$$

Si consideramos ahora a f como función sólo de x, lo único que podemos hacer es una derivada total $\frac{df}{dx}$. Esta derivada se puede hacer usando la regla de la cadena:

$$\frac{df(x)}{dx} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=y(x)} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{y=y(x)} \cdot \frac{dy(x)}{dx} \tag{2.12}$$

2.4.1. **Demostrar que $\frac{df}{dx}$ calculada de esta manera coincide con la derivada calculada directamente a través de $f(x) = 2x^3 + 3x^4$.**

2.5. Ecuaciones exactas

Imaginemos una ecuación diferencial escrita en la forma:

$$N(x,y)y' + M(x,y) = 0, \tag{2.13}$$

siendo $N(x,y)$, $M(x,y)$ funciones conocidas. Como $y' = \frac{dy}{dx}$ la ecuación diferencial se puede escribir como $N(x,y)dy + M(x,y)dx = 0$ que es una forma más nmemotécnica.

2.5.1. **$y' = \frac{-2y}{3x}$ se puede escribir en la forma (2.13) de varias maneras distintas:**

$$\begin{aligned} 3xy' + 2y &= 0, & (2.14)\\ 3x^2y^2y' + 2xy^3 &= 0, & (2.15)\\ \frac{3}{y}y' + \frac{2}{x} &= 0. & (2.16) \end{aligned}$$

Si conseguimos escribir una ecuación diferencial en la forma (2.13) de manera que se verifique que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \tag{2.17}$$

entonces le llamamos una **ecuación exacta**. Si conseguimos escribir una ecuación en una forma exacta, estamos muy cerca de encontrar la familia de soluciones, pero no nos hagamos ilusiones, no todas las ecuaciones se pueden poner en la forma exacta.

2.5.2. ¿Es exacta alguna de las formas anteriores de la ecuación $y' = \frac{-2y}{3x}$?

Teorema: La ecuación diferencial $N(x,y)dy + M(x,y)dx = 0$, donde $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ son funciones continuas en una cierta región, es exacta si y sólo si existe una función $\Psi(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.18}$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Imaginemos que existe una función $\Psi(x,y)$ que satisface las condiciones anteriores. Entonces:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} =^{*} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.19}$$

2.5.3. Justificar la igualdad marcada con *

$\Leftarrow$) Buscamos una función $\Psi(x,y)$ que satisfaga $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N$. Tomemos la primera igualdad $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = M$ e integremos con respecto a x (manteniendo y constante):

$$\Psi = \int^x dx\, M(x,y) + H(y) \tag{2.20}$$

siendo $H(y)$ una función arbitraria. Determinaremos esta función pidiendo que se cumpla la segunda condición $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = N$. Esto lleva a

$$N = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \int^x dx\, \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{dH(y)}{dy} \tag{2.21}$$

de donde encontramos

$$\frac{dH(y)}{dy} = N - \int^x dx\, \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow H(y) = \int^y dy\left[N - \int^x dx\, \frac{\partial M}{\partial y}\right]. \tag{2.22}$$

Para que eso tenga sentido, el lado derecho de esta última ecuación tiene que ser función sólo de y.

2.5.4. Esto exige que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int^y dy\left[N-\int^x dx\,\frac{\partial M}{\partial y}\right]\right)=0,$$

y para demostrar esto hay que usar la condición de ecuación exacta $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$.

Ahora podemos encontrar $\Psi(x,y)$:

$$\Psi=\int^x dx\,M+\int^y dy\left[N-\int^x dx\,\frac{\partial M}{\partial y}\right] \tag{2.23}$$

2.5.5. Para la versión de $y'=\frac{-2y}{3x}$ que es exacta, encontrar la función $\Psi(x,y)$.

Una ecuación que es exacta se puede resolver fácilmente. Para ello la escribimos como:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0 \tag{2.24}$$

que según la nota anterior no es más que $\frac{d\Psi(x,y(x))}{dx}=0$ o bien $\Psi(x,y(x))=C$, una constante. Ahora podemos despejar para obtener la familia de soluciones $y(x)$ que dependen de una constante de integración.

2.5.6. En $y'=\frac{-2y}{3x}$ demostrar que $\Psi(x,y)=x^2y^3$ y, por tanto, la solución es $y(x)=Cx^{-2/3}$. Este ejemplo se podía resolver dándose cuenta de que la ecuación diferencial es de variables separadas. Comparad los dos métodos.

2.6. Factor integrante

Si una ecuación diferencial escrita en la forma $N(x,y)y'+M(x,y)=0$ no es exacta, puede ocurrir que exista una función $\mu(x,y)$ tal que al multiplicar la ecuación por $\mu(x,y)$ se convierta en exacta.

2.6.1. Demostrar que $-x^2y'+y^2+xy=0$ se convierte en exacta al multiplicarla por $\mu(x,y)=\frac{1}{xy^2}$. Resolver la ecuación.

¿Cómo encontrar un factor integrante? Se debe verificar que $\mu(x,y)N(x,y)y' + \mu(x,y)M(x,y) = 0$ sea exacta, o sea que:

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \tag{2.25}$$

Todo lo que hay que hacer es resolver esta ecuación diferencial en derivadas parciales para la función $\mu(x,y)$. Esto suele ser mucho más difícil que resolver la ecuación original. Sin embargo, hay un par de casos en los que sí se puede encontrar $\mu(x,y)$.

2.6.2. **Imaginemos que existan soluciones donde la función $\mu(x)$ no dependa de y. En ese caso, se llega a:**

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = N^{-1}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{2.26}$$

Esta ecuación tendrá solución si el lado derecho depende sólo de la variable x.

2.6.3. **Encontrar un factor integrante para la ecuación $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$ y resolver la ecuación. ¿Se os ocurre otra manera de resolverla?**

2.6.4. **Encontrar las condiciones para que el factor integrante μ dependa sólo de y.**

2.7. Equación de Ricatti

Es no lineal de la forma:

$$y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \tag{2.27}$$

No existe una manera general de encontrar la solución de una ecuación de Ricatti válida para funciones arbitrarias $q_1(x), q_2(x), q_3(x)$. Sin embargo, es posible hacer las dos afirmaciones siguientes:

1) Si conocemos una solución cualquiera de la ecuación de Ricatti $y_1(x)$ entonces la familia general de soluciones se encuentra mediante el cambio de variables $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$.

2.7.1. Demostrar que $v(x)$ satisface una ecuación lineal que se resolverá. Aplicar este método para resolver el problema:

$$y' = x^2 + \frac{y}{x} - y^2, \qquad y(x=1) = 0 \tag{2.28}$$

dándose cuanta de que $y_1(x) = x$ es una solución de esta ecuación.

---

2) Una ecuación de Ricatti se puede convertir en una ecuación lineal de segundo orden, haciendo los cambios de variables a una función $z(x)$ que satisface $\frac{z'}{z} = -q_3 y$.

2.7.2. Encontrar la ecuación diferencial lineal para la función $z(x)$ asociada a la ecuación de Ricatti del caso anterior.
