5.3.- Sistemas Lineales

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= P(t)\cdot\vec{x} + \vec{g}(t) \\ \vec{x}(t_0) &= \vec{x}^{(0)}\end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema corre pareja con la teoría de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n. Consideremos primero el sistema homogéneo

$$\dot{\vec{x}} = P(t)\cdot\vec{x}$$

Este sistema puede tener varias soluciones. Sean $\vec{x}^{(1)}(t), \ldots, \vec{x}^{(k)}(t)$ soluciones

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x_m^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \;\ldots\ldots, \; \vec{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(k)}(t) \\ \vdots \\ x_m^{(k)}(t) \end{pmatrix}$$

Empezamos con el principio de superposición: Si $\vec{x}^{(1)}$ y $\vec{x}^{(2)}$ son dos soluciones del sistema homogéneo, cualquier combinación lineal $C_1\cdot\vec{x}^{(1)} + C_2\cdot\vec{x}^{(2)}$ es también solución. (La demostración es trivial).

Ejemplo:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\vec{x}$$

Dos soluciones son

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} \qquad \vec{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Conviene preguntarse si dos (o más soluciones) son un conjunto linealmente independiente de vectores. Si hay n soluciones $\{\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}\}$ serán linealmente independientes si

$$W[\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}] = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m^{(1)} & x_m^{(2)} & \cdots & x_m^{(m)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$W[\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}]$ se llama el wronskiano de las soluciones.

En el caso anterior

$$W[\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}] = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t} \neq 0$$

y $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}$ son l.i.

Si tenemos n soluciones l.i. es posible entonces satisfacer cualquier condición inicial. Es decir, hemos encontrado la solución general. En efecto

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n \vec{x}^{(n)}(t)$$

es la solución general. Basta demostrar que se puede satisfacer cualquier condición inicial

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{(0)}$$

$$\vec{x}^{(0)} = C_1 \vec{x}^{(1)}(t_0) + \dots + C_n \vec{x}^{(n)}(t_0)$$

En forma matricial esta ecuación se escribe como

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \dots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{(0)} \\ \vec{x}_2^{(0)} \\ \vdots \\ \vec{x}_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

como el determinante de la matriz de esta ecuación es diferente de 0 porque $\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(n)}$ son l.i, esta ecuación tiene solución (única).

Resumiendo: Si encontramos n soluciones l.i. del sistema homogéneo tenemos la solución general del sistema.

La solución general del sistema del ejemplo anterior es

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

o

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \\ x_2(t) &= 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} \end{aligned} \right\}$$

Hay un teorema parecido al caso del wronskiano en las ecuaciones lineales de orden n: $W[\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}] = W(t)$ es diferente de cero siempre o idénticamente nulo. La demostración se hace demostrando la identidad

$$\frac{dW}{dt} = (P_{11} + \cdots + P_{nn})W$$

$$W(t) = C \cdot e^{t \cdot \sum_{i=1}^{n} P_{ii}} = C \cdot e^{t \cdot Tr(P)}$$

Lo único que tenemos que hacer, pues, es encontrar n soluciones l.i. del sistema

$$\dot{\vec{x}} = P \cdot \vec{x}$$

Consideramos sólo el caso de coeficientes constantes.
Buscamos soluciones del tipo

$$\vec{x}(t) = \vec{\xi} \cdot e^{rt}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = r \cdot \vec{\xi} \cdot e^{rt}$$

$$r \cdot \vec{\xi} \cdot \cancel{e^{rt}} = P \cdot \vec{\xi} \cdot \cancel{e^{rt}}$$

$$(P - r \cdot \mathbb{1}) \cdot \vec{\xi} = 0$$

Hemos de resolver una ecuación de valores propios.

Veamos el ejemplo anterior

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x} = \vec{\xi} e^{rt} \qquad \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \vec{\xi} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \qquad r^2 - 2r - 3 = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 3 & \vec{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ r_2 = -1 & \vec{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \qquad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$\vec{x}^{(1)}$ y $\vec{x}^{(2)}$ son l.i. (demostrado antes). De manera que la solución general es

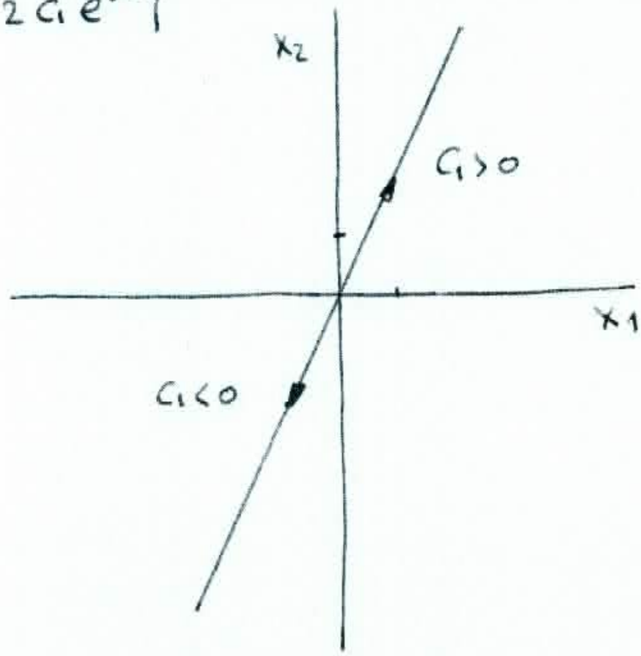
$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}^{(1)} + C_2 \vec{x}^{(2)}$$

Recordemos la posible interpretación de $\vec{x}(t)$ como las coordenadas paramétricas de un punto en un espacio n-dimensional.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + C_2 \cdot e^{-t} \\ 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

Para ver cómo este punto se mueve con t consideremos primero el caso $C_2=0$

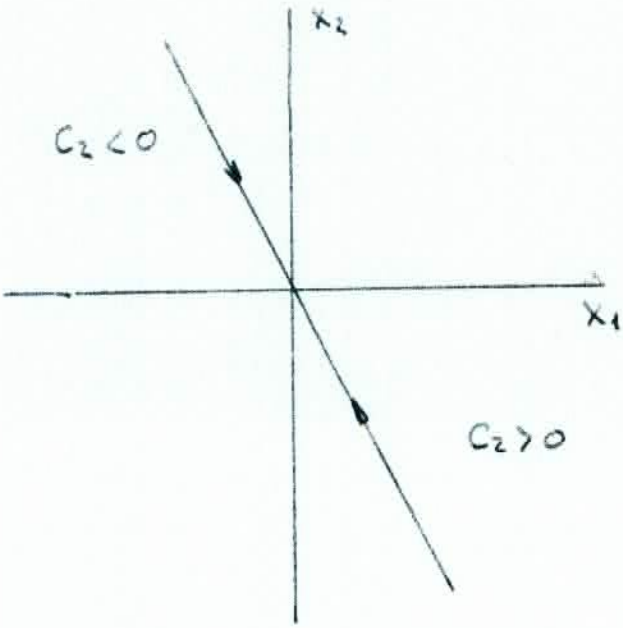
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{3t} \\ x_2 &= 2C_1 e^{3t} \end{aligned}\right\} \quad x_2 = 2x_1 \quad \text{, ecuación de una recta}$$



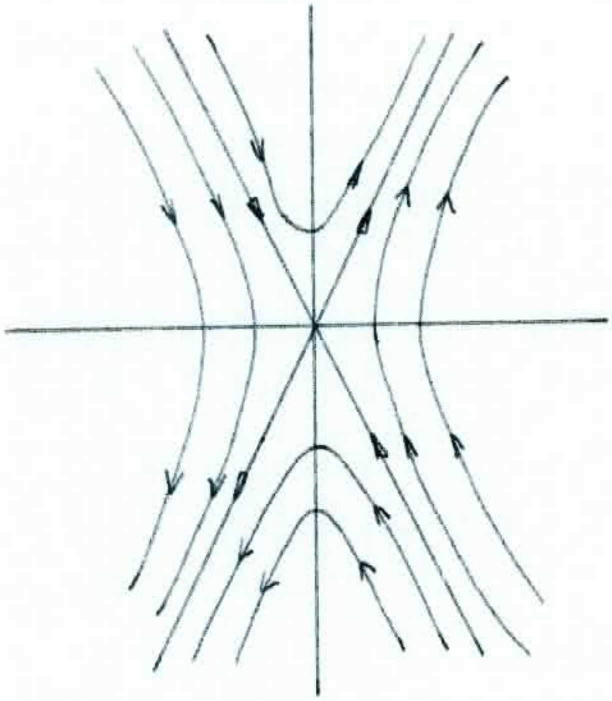
Flechas indican sentido cuando $t\uparrow$

El caso $C_1=0$ da análogamente $x_2=-2x_1$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_2 e^{-t} \\ x_2 &= -2C_2 e^{-t} \end{aligned}\right\}$$



Si $C_1 \neq 0$ y $C_2 \neq 0$ las trayectorias completas son:



El origen se llama un punto de silla. (saddle point)

Veamos otro ejemplo:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = P \cdot \vec{x}$$

Vector prueba $\vec{x} = \vec{\xi} \cdot e^{rt} \Rightarrow |P - r\mathbb{1}| = 0$

$$\begin{vmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 + 5r + 4 = 0 \begin{cases} r_1 = -1 \\ r_2 = -4 \end{cases}$$

$r_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -3-(-1) & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$r_2 = -4$

$$\begin{pmatrix} -3-(-4) & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-(-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dos soluciones son, pues:

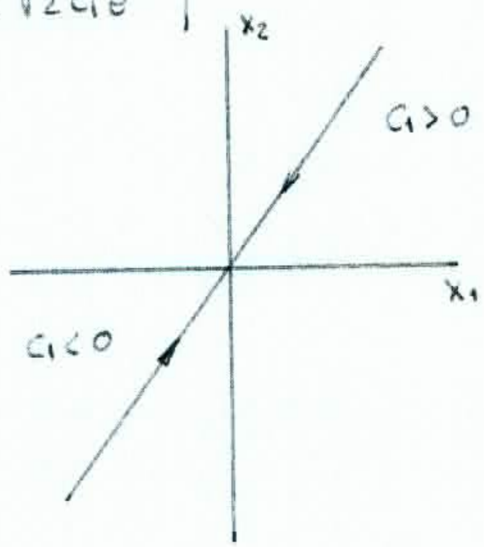
$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} \qquad \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Como $\vec{x}^{(1)}$ y $\vec{x}^{(2)}$ son l.i. la solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}^{(1)} + C_2 \vec{x}^{(2)} \qquad \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} - \sqrt{2}\, C_2 e^{-4t} \\ x_2(t) = \sqrt{2}\, C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} \end{cases}$$

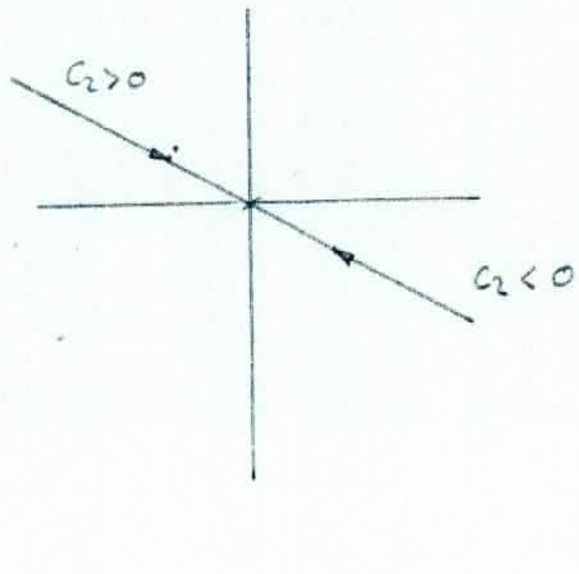
Para dibujar las trayectorias consideramos primero $C_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= \sqrt{2}\, C_1 e^{-t} \end{aligned}\right\} \quad x_2 = \sqrt{2}\, x_1$$

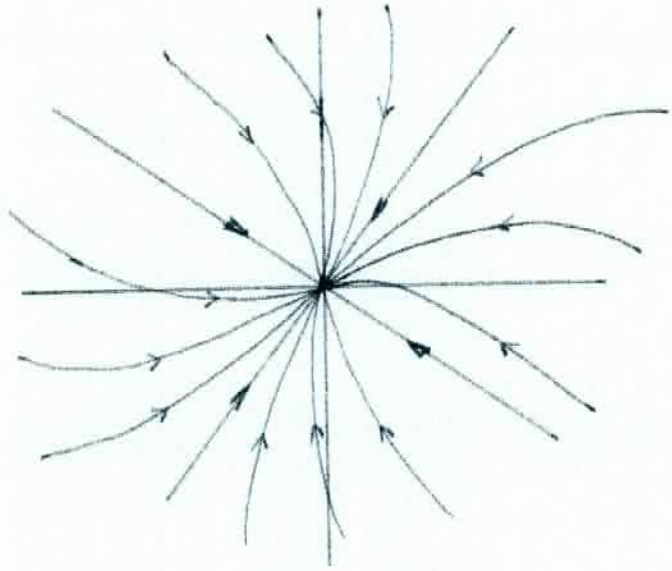


Para el caso $C_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= -\sqrt{2}\, C_2 e^{-4t} \\ x_2(t) &= C_2 e^{-4t} \end{aligned}\right\} \quad x_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}\, x_1$$



Las trayectorias más generales son:



El origen se llama un "nodo".

En el caso general del sistema de orden n

$$\dot{\vec{x}} = P\,\vec{x}$$

se toma como función prueba $\vec{x}(t) = \vec{\xi}\, e^{rt}$, lo que lleva a la ecuación característica

$$|P - r\cdot\mathbb{1}| = 0$$

Si esta ecuación tiene n raíces diferentes $r_1, \dots, r_n$ cada una de las cuales tendrá un vector propio asociado $\vec{\xi}^{(i)}$. La solución será

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, \vec{\xi}^{(i)} \cdot e^{r_i t}$$

Si alguna de las raíces del polinomio característico son complejas, aparecerá junto con su compleja conjugada y el vector propio asociado a la compleja conjugada es el complejo conjugado del vector propio asociado a ella (esto es verdad si la matriz P es real). En efecto, sea $r = \lambda + i\mu$ una raíz cuyo vector propio es $\vec{\xi}$. Se cumple

$$(P - r\mathbb{1})\,\vec{\xi} = 0$$

Y dos soluciones l. i. son

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}^{(1)} &= e^{r_1 t}\,\vec{\xi}^{(1)}\\ \vec{x}^{(2)} &= e^{r_2 t}\,\vec{\xi}^{(2)}\end{aligned}\right\}$$

o bien

$$\vec{u} = e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}0\\+1\end{pmatrix}\sin t\right] = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos t\right] = e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}$$

La solución general es

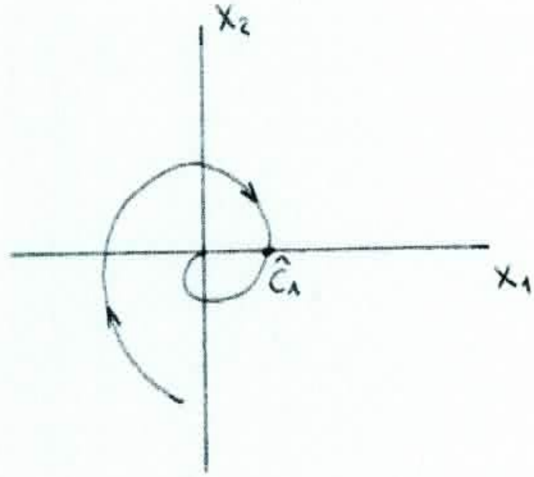
$$\vec{x}(t) = C_1\,\vec{x}^{(1)} + C_2\,\vec{x}^{(2)}$$

o bien

$$\vec{x}(t) = \hat{C}_1\cdot\vec{u} + \hat{C}_2\cdot\vec{v}$$

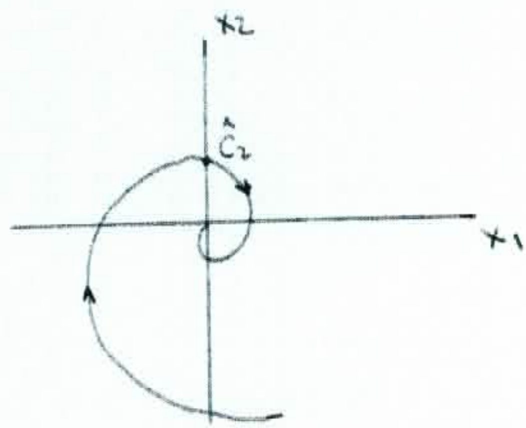
Representemos las trayectorias en este caso. Primero hagamos $\hat{C}_2 = 0$

$$\vec{x}(t) = \hat{C}_1\, e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$$



Ahora $\hat{C}_1 = 0$

$$\vec{x}(t) = \hat{C}_2\, e^{-\frac{1}{2}t}\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}$$



Tomando complejo conjugado en esta relación, se tiene

$$(P - r^* 1)\,\vec{\xi}^* = 0$$

(ya que $P^* = P$) lo que prueba lo dicho.

En el caso de raíces complejas se puede, si se desea, agrupar las exponenciales complejas en funciones seno y coseno reales. En efecto

$$r = \lambda + i\mu\,, \quad \vec{\xi} = \vec{a} + i\vec{b}\,, \quad \vec{x}^{(1)} = \vec{\xi}\, e^{rt}$$

$$r^* = \lambda - i\mu\,, \quad \vec{\xi}^* = \vec{a} - i\vec{b}\,, \quad \vec{x}^{(2)} = \vec{\xi}^*\, e^{r^* t}$$

Así

$$\vec{x}^{(1)} = (\vec{a} + i\vec{b})\, e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t}(\vec{a}\cos\mu t - \vec{b}\sin\mu t) + i e^{\lambda t}(\vec{a}\sin\mu t + \vec{b}\cdot\cos\mu t)$$

$$\vec{x}^{(2)} = e^{\lambda t}(\vec{a}\cos\mu t - \vec{b}\sin\mu t) - e^{\lambda t}(\vec{a}\sin\mu t + \vec{b}\cos\mu t)$$

Definimos

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{2}\left(\vec{x}^{(1)}(t) + \vec{x}^{(2)}(t)\right) = e^{\lambda t}\left(\vec{a}\cos\mu t - \vec{b}\sin\mu t\right)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{2i}\left(\vec{x}^{(1)}(t) - \vec{x}^{(2)}(t)\right) = e^{\lambda t}\left(\vec{a}\sin\mu t + \vec{b}\cos\mu t\right)$$

$\vec{u}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son también dos soluciones l.i. del sistema.

Veamos un ejemplo:

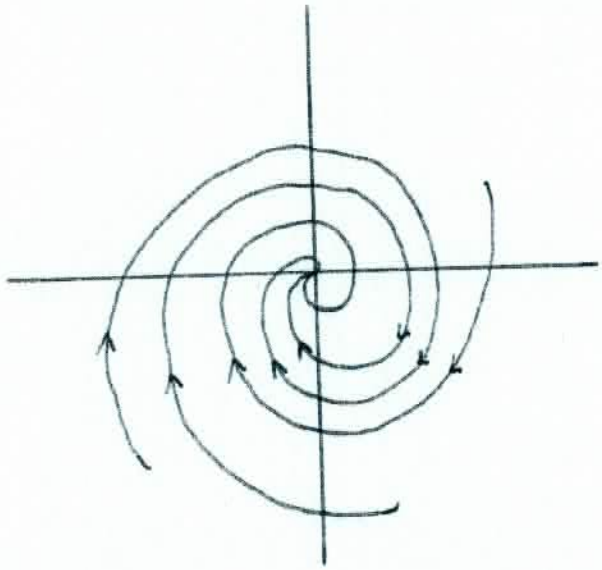
$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{vmatrix} = 0 \qquad r^2 + r + 5/4 = 0 \qquad \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2} + i \\ r_2 = -\frac{1}{2} - i \end{cases}$$

$$\vec{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En el caso general las trayectorias son:



El origen es un punto espiral.

- Caso de raíces repetidas.

Si la matriz P es diagonalizable, cada valor propio tendrá asociado tantos vectores propios como su multiplicidad. En total tendremos n vectores propios y n soluciones l.i. con lo que ya habremos encontrado la solución general.

Ejemplo:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$r_1 = 2 \qquad \vec{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{cases} r_2 = -1 \qquad \vec{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \\ r_3 = -1 \qquad \vec{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \end{cases}$$

$$\vec{X}(t) = C_1 \vec{X}^{(1)} + C_2 \vec{X}^{(2)} + C_3 \vec{X}^{(3)}$$

Si la multiplicidad de la raíz r es m y la dimensionalidad del e.v. asociado es d, hace falta encontrar $s \equiv m-d$ nuevas soluciones. Éstas se encuentran como productos de la exponencial e^{rt} por polinomios de grados $1, 2, \dots, s$. Estos polinomios tienen coeficientes que son vectores

$$\vec{x}^{(1)} = (\vec{a}^{(1)} t + \vec{a}^{(2)}) e^{rt}$$
$$\vec{x}^{(2)} = (\vec{b}^{(1)} t^2 + \vec{b}^{(2)} t + \vec{b}^{(3)}) e^{rt}$$
$$\vdots$$

Veámoslo con un ejemplo:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

$$\vec{x} = \vec{\xi} e^{rt} \qquad |\mathbb{P} - r\mathbb{1}| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0$$

$r = 2$ doble

sólo un vector propio $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

La segunda solución se encuentra probando

$$\vec{x}^{(2)}(t) = (\vec{a}^{(1)} t + \vec{a}^{(2)}) e^{2t}$$
$$\dot{\vec{x}}^{(2)}(t) = (\vec{a}^{(1)} + 2\vec{a}^{(1)} t + 2\vec{a}^{(2)}) e^{2t} = \mathbb{P}(\vec{a}^{(1)} t + \vec{a}^{(2)})$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{P}\vec{a}^{(1)} &= 2\vec{a}^{(1)} \\ \mathbb{P}\vec{a}^{(2)} &= \vec{a}^{(1)} + 2\vec{a}^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} (\mathbb{P} - 2\cdot\mathbb{1})\vec{a}^{(1)} &= 0 \\ (\mathbb{P} - 2\cdot\mathbb{1})\vec{a}^{(2)} &= \vec{a}^{(1)} \end{aligned}\right\}$$

La primera ecuación es la de valores propios de la matriz $\mathbb{P}$ con el valor propio 2. La solución es, pues,

$$\vec{a}^{(1)} = \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1^{(2)} + a_2^{(2)} = -1$$
$$a_2^{(2)} = -1 - a_1^{(2)}$$

y así
$$\vec{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ -1-a_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_1^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_1^{(2)} \vec{\xi}$$

y la segunda solución es

$$\vec{x}^{(2)} = \left(\vec{\xi}\, t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + a_1^{(2)} \vec{\xi} \right) e^{2t}$$
$$= \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{2t} + a_1^{(2)} \underbrace{\vec{\xi}\, e^{2t}}_{\vec{x}^{(1)}}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

y la solución total es

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ya que es claro que $\vec{x}^{(1)}$ y $\vec{x}^{(2)}$ son l.i. El wronskiano es:
$$W(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & t\, e^{2t} \\ -e^{2t} & (-t-1)\, e^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \begin{vmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{vmatrix} = -e^{4t} \neq 0$$

5.4.- Matriz Fundamental

Cuando tenemos n soluciones l.i. $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}$ del sistema lineal, las disponemos en forma de matriz: la matriz fundamental del sistema, $\Psi(t)$

$$\dot{\vec{x}} = P(t) \cdot \vec{x}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}_1^{(1)}(t) & \vec{x}_1^{(2)}(t) & \cdots & \vec{x}_1^{(n)}(t) \\ \vec{x}_2^{(1)}(t) & \vec{x}_2^{(2)}(t) & \cdots & \vec{x}_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{x}_n^{(1)}(t) & \vec{x}_n^{(2)}(t) & \cdots & \vec{x}_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

La solución

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \vec{x}^{(i)}(t)$$

En coordenadas

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, x_j^{(i)}(t)$$

se puede escribir en forma matricial

$$\vec{x}(t) = \Psi(t) \cdot \vec{c}$$

donde

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Ahora es muy fácil satisfacer la condición inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{(0)}$

$$\vec{x}(t_0) = \Psi(t_0) \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \Psi^{-1}(t_0) \cdot \vec{x}(t_0)$$

y

$$\underbrace{\vec{x}(t) = \Psi(t) \cdot \Psi^{-1}(t_0) \cdot \vec{x}(t_0)}$$

$$= G(t, t_0) \cdot \vec{x}(t_0)$$

donde $G(t,t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$ es el "propagador".

Consideremos ahora un conjunto fundamental de soluciones $\{\vec{v}^{(i)}(t)\}_{i=1,\dots,n}$ que satisfacen las condiciones

$$\vec{v}^{(i)}(t_0) = \vec{e}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (i) \qquad \text{base canónica}$$

La matriz fundamental en este caso especial se escribe $\Phi(t)$ y satisface $\Phi(t_0) = \mathbb{1}$. De manera que la solución se escribe de manera más sencilla

$$\vec{X}(t) = \Phi(t) \cdot \vec{X}(t_0)$$

comparando con la solución anterior se tiene

$$\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$$

lo que nos permite encontrar el conjunto fundamental de soluciones especial que habíamos introducido.

Veamos un ejemplo:

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} \qquad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$r_1 = 3 \qquad \vec{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}^{(1)} = \vec{\xi}^{(1)} e^{3t}$$

$$r_2 = -1 \qquad \vec{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}^{(2)} = \vec{\xi}^{(2)} e^{-t}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Psi^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{G(t,0)}{\cancel{\Phi(t)}} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

y la solución es:

$$\vec{x}(t) = \overset{G(t,0)}{\cancel{\phi(t)}}\, \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{3t} + e^{-t} \\ 4e^{3t} - 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

El conjunto fundamental de soluciones $\{\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}\}$ se obtiene leyendo la matriz $\phi(t) = G(t, t_0)$

$$\vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

La matriz fundamental satisface la misma ecuación que $\vec{x}(t)$

$$\dot{\psi}(t) = P(t) \cdot \psi(t)$$

ya que cada columna de $\psi(t)$ satisface esta ecuación.

5.5.- Sistemas no homogéneos

$$\dot{\vec{x}}(t) = P(t)\cdot \vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

No entramos en detalles (que son los mismos que en el caso de las ecuaciones lineales de orden n), diremos sólo que la solución general de esta ecuación es

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^{(c)}(t) + \vec{x}^{(p)}(t)$$

donde $\vec{x}^{(c)}(t)$ es la solución general del sistema homogéneo y $\vec{x}^{(p)}(t)$ es <u>una</u> solución particular de la ecuación completa. Como en el caso de e.d.o. de orden n veremos varios métodos:

A) Coeficientes indeterminados

Este método es útil si la matriz P es constante y el vector $\vec{g}(t)$ es una combinación de polinomios, exponenciales, senos y cosenos. En vez de estudiar toda la casuística veremos un ejemplo concreto:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{g}_1(t)} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{g}_2(t)} = \vec{\alpha}\, e^{-t} + \vec{\beta}\, t$$

Encontraremos soluciones particulares correspondientes a $\vec{g}_1(t)$ y $\vec{g}_2(t)$ por separado. Pero primero encontraremos la solución del sistema homogéneo.

$$|P - r\mathbb{1}| = 0 \qquad \begin{array}{lll} r_1 = -1 & \vec{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{x}^{(1)} = \vec{\xi}^{(1)} e^{-t} \\ r_2 = -3 & \vec{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{x}^{(2)} = \vec{\xi}^{(2)} e^{-3t} \end{array}$$

$$\vec{x}^{(c)}(t) = C_1 \vec{x}^{(1)} + C_2 \vec{x}^{(2)}$$

Para $\vec{g}_1(t)$ tomamos como función prueba

$$\vec{x}^{(p_1)} = (\vec{a}\,t + \vec{b})\,e^{-t}$$

sólo $\vec{b}\,e^{-t}$ no bastaría porque -1 es v.p. de la matriz P.

$$\dot{\vec{x}}^{(p_1)} = (\vec{a} - \vec{a}\,t - \vec{b})\,e^{-t} = \mathbb{P}(\vec{a}\,t + \vec{b})\,e^{-t} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}e^{-t}$$

$$\left.\begin{array}{l} t^1 \rightarrow \ \mathbb{P}\vec{a} = -\vec{a} \\ t^0 \rightarrow \ \mathbb{P}\vec{b} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \vec{a} - \vec{b} \end{array}\right\}$$

La primera ecuación es la de v.p. con v.p. -1, la solución es cualquier vector proporcional al vector propio $\vec{\xi}$

$$\vec{a} = \alpha\cdot\vec{\xi} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

La segunda ecuación es

$$(\mathbb{P} + \mathbb{1})\,\vec{b} = \vec{a} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-2\\ \alpha\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -b_1 + b_2 = \alpha - 2 \\ b_1 - b_2 = \alpha \end{array}\right\} \text{sumando} \qquad 0 = 2\alpha - 2 \qquad \alpha = 1$$

$$b_2 = b_1 - 1 \quad \rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_1 - 1\end{pmatrix}$$

como sólo buscamos una solución, tomamos $b_1 = 1$ (por ejemplo)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(p_1)} = \begin{pmatrix}t+1\\ t\end{pmatrix}e^{-t}$$

Veamos la solución correspondiente a $\vec{g}_2(t)$

$$\vec{x}^{(p_2)}(t) = \vec{c}\,t + \vec{d}$$

$$\dot{\vec{x}}^{(P_2)} = \vec{c} = P(\vec{c}t+\vec{d}) + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}t$$

$$t^1 \rightarrow \quad 0 = P\vec{c} + \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

$$t^0 \rightarrow \quad \vec{c} = P\vec{d}$$

La primera ecuación es

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l}-2c_1+c_2=0\\ c_1-2c_2=-3\end{array}\right\} \begin{array}{l}c_1=1\\c_2=2\end{array}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

La segunda da

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l}-2d_1+d_2=1\\ d_1-2d_2=2\end{array}\right\} \begin{array}{l}d_1=-4/3\\d_2=-5/3\end{array}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix}-4/3\\-5/3\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(P_2)} = \begin{pmatrix}t-4/3\\2t-5/3\end{pmatrix}$$

La solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}t-4/3\\2t-5/3\end{pmatrix}$$

B) Método de Variación de los parámetros.

Como siempre, éste es el método más general. Supongamos que el sistema homogéneo tiene como matriz fundamental $\psi(t)$ de manera que la solución del homogéneo es

$$\vec{x}(t) = \psi(t)\cdot\vec{C}$$

Para el sistema completamente probamos una solución

$$\vec{x}(t) = \psi(t)\cdot u(t)$$

Así

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\psi}(t)\cdot\vec{u}(t) + \psi(t)\cdot\dot{\vec{u}}(t)$$

$$\underbrace{\dot{\psi}(t)\vec{u}(t)}_{P(t)\psi(t)} + \psi(t)\dot{\vec{u}}(t) = P(t)\psi(t)\vec{u}(t) + \vec{g}(t)$$

$$\psi(t)\dot{\vec{u}}(t) = \vec{g}(t)$$

$$\dot{\vec{u}}(t) = \psi^{-1}(t)\vec{g}(t)$$

Integrando $\vec{u}(t) = \vec{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \psi^{-1}(s)\vec{g}(s)\,ds$

y la solución es

$$\vec{x}(t) = \psi(t)\vec{u}(t) = \psi(t)\vec{u}(t_0) + \psi(t)\int_{t_0}^{t}\psi^{-1}(s)\vec{g}(s)\,ds$$

como $\vec{x}(t_0) = \psi(t_0)\vec{u}(t_0) \Rightarrow \vec{u}(t_0) = \psi^{-1}(t_0)\vec{x}(t_0)$

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\psi(t)\psi^{-1}(t_0)\vec{x}(t_0)}_{x^{(c)}(t)} + \underbrace{\psi(t)\int_{t_0}^{t}\psi^{-1}(s)\vec{g}(s)\,ds}_{x^{(p)}(t)}$$

Resolvamos el ejemplo anterior por este método. La matriz fundamental es

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} \qquad \psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\psi^{-1}(s)\,\vec{g}(s) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}s\,e^{s} \\ e^{2s} - \frac{3}{2}s\,e^{3s} \end{pmatrix}$$

$$\int \psi^{-1}(s)\,\vec{g}(s)\,ds = \begin{pmatrix} t + \frac{3}{2}(t-1)e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}(3t-1)e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(p)} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} t + \frac{3}{2}(t-1)e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}(3t-1)e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t+\frac{1}{2})e^{-t} + t - \frac{4}{3} \\ (t-\frac{1}{2})e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}}_{\text{parte de la solución}} + \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} t - 4/3 \\ 2t - 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = G(t,t_0)\,\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} G(t,s)\,\vec{g}(s)\,ds$$

remarquemos q $G(t,t_0)$ es el propagador de la ecuación homogénea.

→ El propagador es:

$$t,0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-3(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)} & -e^{-3(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)} \\ -e^{-3(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)} & e^{-3(t-t_0)} + e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix}$$