Capítulo 11

Propiedades de las funciones de Bessel

11.1. Relaciones de recurrencia

Si partimos de la serie que define a la función de Bessel,

11.1.1. se demuestra directamente que

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x) \tag{11.1}$$

Fórmulas equivalentes a

$$\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x), \qquad \frac{-\nu}{x}J_{\nu}(x) + J'_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x) \tag{11.2}$$

Sumando, se obtiene la derivada de la función de Bessel:

$$J'_{\nu}(x) = \frac{1}{2}\left[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right], \tag{11.3}$$

y restando, la relación de recurrencia:

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x). \tag{11.4}$$

Estas fórmulas son válidas $\forall \nu \in \mathbb{R}$. Un caso particular es $\nu = 0$ donde (11.4) nos dice que $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ (lo que ya sabíamos) y (11.3) nos dice que $J'_0(x) = -J_1(x)$. Si integramos (11.3) y usamos que $J_{\nu}(\infty) = 0, J_{\nu}(0) = 0$ si $\nu > 0$ queda

$$\int_0^{\infty} dx J_{\nu-1}(x) = \int_0^{\infty} dx J_{\nu+1}(x), \qquad \nu > 0, \tag{11.5}$$

mientras que para $\nu = 0$, el resultado $J_0(0) = 1$ da $\int_0^{\infty} dx J_1(x) = 1$, que unido a (11.5) da $\int_0^{\infty} dx J_{2k+1}(x) = 1, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. De hecho, un resultado más fuerte dice que:

$$\int_0^{\infty} dx J_{\nu}(x) = 1, \qquad \nu > -1. \tag{11.6}$$

11.2. Función generatriz

La función $f(x,h) = e^{\frac{x}{2}\left(h-\frac{1}{h}\right)}$ se conoce como función generatriz de las funciones de Bessel de orden entero, porque tiene la maravillosa propiedad de que su desarrollo de Laurent en h tiene como coeficientes las funciones de Bessel de orden entero:

$$e^{\frac{x}{2}\left(h-\frac{1}{h}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n. \tag{11.7}$$

Esto no es muy difícil de demostrar, pero sí laborioso. Partimos de los desarrollos en serie de las exponenciales:

$$f(x,h) = e^{\frac{xh}{2}} e^{\frac{-xh}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xh}{2}\right)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-x}{2h}\right)^m}{m!} \tag{11.8}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+m}}{n!m!} h^{n-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{t=-m}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+t}}{(m+t)!m!} h^t \tag{11.9}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado el cambio de variables $t = n - m$. Ahora usamos un cambio en el orden de las sumas:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{t=-m}^{\infty} = \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} + \sum_{t=-\infty}^{-1}\sum_{m=-t}^{\infty} \tag{11.10}$$

que se entiende mejor mediante un esquema gráfico. Así queda:

$$= \sum_{t=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+t}}{(m+t)!m!}\right] h^t + \sum_{t=-\infty}^{-1}\left[\sum_{m=-t}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+t}}{(m+t)!m!}\right] h^t \tag{11.11}$$

La serie del primer corchete es directamente $J_t(x)$. En el segundo sumando hacemos el cambio de variable $\ell = m+t$:

$$= \sum_{t=0}^{\infty} J_t(x)h^t + \sum_{t=-\infty}^{-1}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-t} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\ell-t}}{\ell!(\ell-t)!}\right] h^t \tag{11.12}$$

El corchete del segundo sumando es ahora $(-1)^{-t}J_{-t}(x) = J_t(x)$, con lo que queda:

$$= \sum_{t=0}^{\infty} J_t(x)h^t + \sum_{t=-\infty}^{-1} J_t(x)h^t = \sum_{t=0}^{\infty} J_t(x)h^t. \tag{11.13}$$

11.3. Representaciones integrales

El desarrollo (11.7) es una fuente inagotable de resultados. Tomemos, por ejemplo $h = e^{i\theta}$ para obtener:

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta}. \tag{11.14}$$

Multiplicamos los dos lados de esta ecuación por $e^{-im\theta}$ y usamos la integral:

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{ik\theta} = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z} - \{0\}, \end{cases} \tag{11.15}$$

para obtener

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{i(x\sin\theta - m\theta)}. \tag{11.16}$$

Como $J_m(x)$ es real, podemos tomar la parte real de la integral

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \cos(x\sin\theta - m\theta). \tag{11.17}$$

11.3.1. **Por último, separamos la integral en los intervalos $(0,\pi)$ y $(\pi,2\pi)$ para tener la notable fórmula:**

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(x\sin\theta - m\theta), \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{11.18}$$

en particular, cuando $m = 0$,

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos(x\sin\theta). \tag{11.19}$$

La representación integral (11.18) sólo es válida para $m \in \mathbb{Z}$. Hay otra representación integral de $J_\nu(x)$ válida para $\nu > -1/2$:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} dt\, (1 - t^2)^{\nu - 1/2} \cos(tx). \tag{11.20}$$

La demostración más sencilla usa el desarrollo en serie del $\cos(tx) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!}$ y la integral

$$\int_{-1}^{1} dt\, (1 - t^2)^{\nu - 1/2} t^{2n} = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \nu + 1)}, \tag{11.21}$$

que, sustituidos en (11.20) reproduce la serie que define a la función de Bessel $J_\nu(x)$. Los cambios de variable $t = \sin\theta$ ó $t = \cos\theta$ dan ahora una variedad de fórmulas integrales que no escribiremos, pero que se pueden encontrar en libros de tablas de integrales.

11.4. Ceros de las funciones de Bessel

Del análisis de las gráficas de $J_\nu(x)$ se ve que hay un número infinito de ceros en el intervalo $(0,\infty)$ que llamaremos $x_n^\nu, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. No existen (salvo casos particulares) expresiones cerradas para estos ceros, pero se pueden calcular numéricamente con la precisión que uno quiera. Por ejemplo $x_0^{\nu=3}=0$, $x_1^{\nu=3}=0{,}380161895923981\ldots$, $x_2^{\nu=3}=9{,}76102312998153\ldots$, $x_3^{\nu=3}=13{,}015200721698434\ldots$. Hay fórmulas aproximadas para estos ceros que se basan en el desarollo asintótico (10.22), que da:

$$x_n^\nu \approx \pi\left(n+\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right). \tag{11.22}$$

Por ejemplo, para $\nu=3$ da $x_2^{\nu=3}=10{,}21\ldots$, $x_3^{\nu=3}=13{,}35\ldots$. La aproximación mejora para ν y n grandes.

De las relaciones de recurrencia se deduce que entre dos ceros de $J_\nu(x)$ hay un cero de $J_{\nu+1}(x)$ y viceversa. Una propiedad que es evidente en las gráficas de las funciones $J_\nu(x)$.

11.5. Relaciones de ortogonalidad y desarrollo de una función en serie de Bessel

Si $x_n, n=0,1,2,\ldots$ son los ceros de la función $J_\nu(x)$ (aligeramos la notación y escribimos x_n en vez de x_n^ν), definimos la familia de funciones $y_n(x)=J_\nu(x_n x)$.

11.5.1. Estas funciones satisfacen unas ecuaciones diferenciales de las que escribimos dos:

$$x^2y_n''+xy_n'+(x^2{x_n}^2-\nu^2)y_n = 0, \tag{11.23}$$
$$x^2y_m''+xy_m'+(x^2{x_m}^2-\nu^2)y_m = 0. \tag{11.24}$$

Vamos a obtener ahora las conocidas como relaciones de ortogonalidad. Para ello

---

11.5.2. multiplicamos la primer ecuación por y_m, la segunda por y_n y restamos. Después de unas manipulaciones obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left[x(y_n'(x)y_m(x)-y_m'(x)y_n(x))\right]=(x_m^2-x_n^2)xy_m(x)y_n(x) \tag{11.25}$$

Integrando entre $x=0$ y $x=1$ obtenemos:

$$\int_0^1 dx\,xJ_\nu(x_nx)J_\nu(x_mx) = \frac{x_mJ_\nu(x_n)J_\nu'(x_m)-x_nJ_\nu(x_m)J_\nu'(x_n)}{x_n^2-x_m^2} \tag{11.26}$$
$$= \frac{x_mJ_\nu(x_n)J_\nu'(x_m)}{x_n^2-x_m^2} \tag{11.27}$$

Para pasar de la primera a la segunda igualdad, hemos usado que $J_\nu(x_m) = 0$ (pero todavía no hemos usado que $J_\nu(x_n) = 0$). Ahora si $m \neq n$ usamos que $J_\nu(x_n) = 0$ y la integral (11.26) vale 0. Si $m = n$, hay una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que se resuelve calculando el limite $x_m \to x_n$ mediante la regla de l'Hôpital. Esto da:

11.5.3.

$$\int_0^1 dx\, x \left[J_\nu(x_n x)\right]^2 = \frac{1}{2}\left[J'_\nu(x_n)\right]^2 \tag{11.28}$$

En resumen,

$$\int_0^1 dx\, x J_\nu(x_n x) J_\nu(x_m x) = \frac{1}{2}\left[J'_\nu(x_n)\right]^2 \delta_{n,m} \tag{11.29}$$

que se conoce como relación de ortogonalidad. De (11.4) y (11.3) se deduce que $J'_\nu(x_n) = J_{\nu-1}(x_n) = -J_{\nu+1}(x_n)$, lo que permite escribir esta relación de otras maneras equivalentes.

Si en un problema las funciones de Bessel son relevantes, puede ser conveniente intentar escribir cualquier otra función que aparezca en dicho problema en términos de las funciones de Bessel. No vamos a explicar aquí el origen de este esta posibilidad ya que se escapa del nivel del curso, pero diremos que, bajo una serie de condiciones adicionales, una función $f(x)$ definida en el intervalo $x \in [0,1]$ se puede desarrollar como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu(x_n x). \tag{11.30}$$

De hecho es fácil, aceptando el desarrollo, calcular los coeficientes a_n como:

11.5.4.

$$a_n = \frac{2}{\left[J'_\nu(x_n)\right]^2} \int_0^1 dx\, x J_\nu(x_n x) f(x). \tag{11.31}$$

Aunque las cuestiones más complicadas se refieren a la convergencia de la serie (11.30).

11.6. La ecuación hipergeométrica

La ecuación hipergeométrica o ecuación de Gauss es:

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \tag{11.32}$$

Con α, β, γ constantes arbitrarias.

11.6.1. Cualquier ecuación de la forma $(Ax^2+Bx+C)y''+(Dx+E)y'+Fy=0$ se puede reducir a la ecuación hipergeométrica mediante un cambio de variables.

El punto $x_0=0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial y se puede probar la solución $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}$. Las raíces de la ecuación indicial son $r_1=0, r_2=1-\gamma$. La casuística ahora es variadísima, pero intentaremos resumir. Introducimos la familia de funciones hipergeométricas ${}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;x)$ como

$$ {}_pF_q(a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!} \tag{11.33}$$

donde se define el símbolo de Pocchammer

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{11.34}$$

con el convenio $(a)_0=1$. La familia de ecuaciones hipergeométricas depende de $p+q$ parámetros $a_1,\dots,a_p;b_1,\dots,b_q$ y es una familia tan amplia que es raro la función que no se pueda escribir como una función hipergeométrica. Las subfamilias más usadas de la familia son la ${}_2F_1(a_1,a_2;b;x)$ que muchas veces se escribe sencillamente $F(a_1,a_2;b;x)$ y se llama función hipergeométrica gaussiana, y la ${}_1F_1(a;b;x)$ que es la función hipergeométrica confluente o función de Kummer. La definición concreta es:

$$F(a_1,a_2;b;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n(a_2)_n}{(b)_n n!}x^n \tag{11.35}$$

$${}_1F_1(a;b;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n n!}x^n \tag{11.36}$$

Como era de prever, las soluciones de la ecuación hipergeométrica se escriben en términos de $F(a_1,a_2;b;x)$ de la siguiente manera:

(i) Si $r_1-r_2=\gamma-1\notin\mathbb{Z}$, es decir, si $\gamma\notin\mathbb{Z}$ las dos soluciones son:

$$y_1(x) = F(\alpha,\beta;\gamma;x) \tag{11.37}$$

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x) \tag{11.38}$$

(ii) Si $\gamma=1$, las soluciones son:

$$y_1(x) = F(\alpha,\beta;1;x) \tag{11.39}$$

$$y_2(x) = F(\alpha,\beta;1;x)\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(n!)^2}(H_n(\alpha)+H_n(\beta)-2H_n)x^n \tag{11.40}$$

siendo $H(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha+n-1}$ y $H_n=H_n(1)$, la sucesión armónica.

(iii) Si $\gamma = 2, 3, 4, \ldots$, pero $\alpha, \beta \neq 0, 1, 2, \ldots, \gamma - 2$, resulta que no se verifica la relación de consistencia y las soluciones son:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= F(\alpha, \beta; 1; x) \qquad (11.41) \\ y_2(x) &= F(\alpha, \beta; 1; x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} [H_n(\alpha) + H_n(\beta) - H_n(\gamma) - H_n] x^n - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\gamma-1} \frac{(1-\gamma)_n (n-1)!}{(1-\alpha)_n (1-\beta)_n} x^{-n} \qquad (11.42) \end{aligned}$$

(iv) Si $\gamma = 0, -1, -2, -3, \ldots$ pero $\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \ldots, \gamma$, tampoco se veriifca la relación de consistencia y las soluciones son:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x) \qquad (11.43) \\ y_2(x) &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x) \ln x + \\ &+ x^{1-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_n (\beta - \gamma + 1)_n}{(2-\gamma)_n n!} [H_n(\alpha - \gamma + 1) + H_n(\beta - \gamma + 1) - H_n(2 - \gamma) - H_n] x^n - \\ &- \sum_{n=1}^{1-\gamma} \frac{(n-1)!(\gamma - 1)_n}{(\gamma - \alpha)_n (\gamma - \beta)_n} x^{1-\gamma-n} \qquad (11.44) \end{aligned}$$

Quedan todavía algunos casos pendientes. Se puede buscar la solución alrededor del punto singular regular $x_0 = 1$. También se puede buscar la solución en la variable $z = 1/x$, etc. pero no diremos nada más sobre las soluciones de la ecuación diferencial hipergeométrica.

El problema con la familia de funciones hipergeométricas es que es demasiado amplia y no se pueden dar características comunes (no todas son oscilantes, no todas decaen a cero en infinito, no todas tienen infinitos ceros reales, no todas ....). Algunas de las muchas funciones que son funciones hipergeométricas incluyen:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= xF(1, 2; 2; -x) \qquad (11.45) \\ (1+x)^n &= F(-n, 1; 1; -x) \qquad (11.46) \\ \cos(x) &= \lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha, \alpha; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4\alpha^2}) \qquad (11.47) \\ \arcsin(x) &= xF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2) \qquad (11.48) \end{aligned}$$

Fórmulas que involucran las funciones hipergeométricas las hay a miles. Pondremos sólo la derivada:

$$\frac{d}{dx} F(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1; \gamma + 1; x) \qquad (11.49)$$

y una relación de recurrencia:

$$(\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x) F(\alpha, \beta; \gamma; x) + \alpha(1-x) F(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) - (\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta; \gamma; x) = 0. \qquad (11.50)$$