

Capítulo 10

Otras ecuaciones relacionadas con la de Bessel

10.1. Funciones de Bessel hiperbólicas

La ecuación

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (10.1)$$

es parecida a la de Bessel, pero tiene un signo cambiado. Se le llama ecuación de Bessel hiperbólica (o modificada). Podemos empezar de cero el proceso de Frobenius para encontrar la solución o, alternatively, podemos hacer un valiente cambio de variable $t = ix$, siendo $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria. Esto lleva fácilmente a

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - \nu^2)y = 0 \quad (10.2)$$

que es de Bessel. La solución es, por tanto, $y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 Y_\nu(t)$ o $y(t) = c_1 J_\nu(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$ si $\nu \neq 0, -1, -2, -3, \dots$

10.1.1. Si reemplazamos $t = ix$ y escribimos la serie de $J_\nu(ix)$ a partir de su definición obtenemos $J_\nu(ix) = i^\nu I_\nu(x)$ siendo

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \quad (10.3)$$

una serie real.

A $I_\nu(x)$ se le conoce como función de Bessel *hiperbólica* (o *modificada*) de primera especie de orden ν y es una solución (real) de la ecuación (10.1). Si $\nu \neq 0, -1, -2, \dots$ la otra solución es, sencillamente, $I_{-\nu}(x)$. Si $\nu = n = 0, 1, 2, 3, \dots$ es fácil ver que $I_{-n}(x) = I_n(x)$, por lo que tenemos que encontrar todavía la segunda solución. Otra vez podríamos hacer todo el proceso que hicimos en la ecuación de Bessel, pero es más sencillo partir de las soluciones de la función de Bessel $J_n(t)$, $Y_n(t)$ con $t = ix$. La solución es entonces $y(x) = c_1 J_n(ix) + c_2 Y_n(ix)$. Aquí conviene separar la parte real de la parte imaginaria

dándose cuenta de que la llamada 1ª función de Hankel¹ $H_v^{(1)}(z) = J_v(z) + iY_v(z)$ cumple que $i^{v+1}H_v^{(1)}(ix)$ es real, lo que lleva a definir la función real $K_v(x) = \frac{\pi}{2}i^{v+1}H_v^{(1)}(ix)$, la función de Bessel hiperbólica (o modificada) de segunda especie, que es una segunda solución de la ecuación de Bessel hiperbólica (o modificada) válida también en el caso $v = n = 0, 1, 2, 3, \dots$

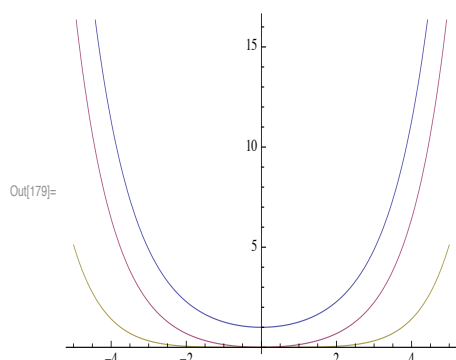
10.1.2. Una definición alternativa es:

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\sin(\pi v)}$$

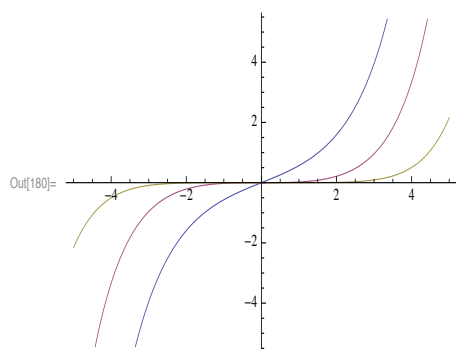
con el correspondiente límite $\lim_{v \rightarrow n}$ cuando sea necesario.

La solución de la ecuación de Bessel hiperbólica (o modificada) es pues, $y(x) = c_1 I_v(x) + c_2 I_{-v}(x)$ si $v \neq 0, 1, 2, \dots$, o $y(x) = c_1 I_v(x) + c_2 K_v(x)$ válida siempre y, en particular, cuando $v = n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Estas funciones son un poco más aburridas que las de Bessel:

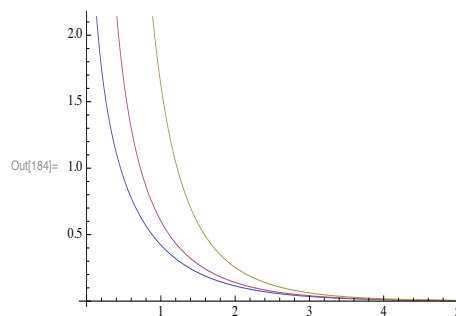
In[179]:= Plot[{BesselI[0, x], BesselI[2, x], BesselI[4, x]}, {x, -5, 5}]



In[180]:= Plot[{BesselI[1, x], BesselI[3, x], BesselI[5, x]}, {x, -5, 5}]



In[184]:= Plot[{BesselK[0, x], BesselK[1, x], BesselK[2, x]}, {x, 0, 5}]



¹También se define la 2ª función de Hankel: $H_v^{(2)}(z) = J_v(z) - iY_v(z)$.

10.2. Ecuaciones reducibles a la de Bessel

Tomemos la ecuación de Bessel para la función $w(z)$:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (gz^2 - v^2)w = 0$$

Si $g = 1$ es la ecuación de Bessel usual; si $g = -1$ es la ecuación de Bessel hiperbólica. La solución para $g = 1$ es $w(z) = c_1 J_v(z) + c_2 K_v(z)$ o $w(z) = c_1 J_v(z) + c_2 J_{-v}(z)$ si $v \neq n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Para $g = -1$ la solución es $w(z) = c_1 I_v(z) + c_2 K_v(z)$ o $w(z) = c_1 I_v(z) + c_2 I_{-v}(z)$ si $v \neq n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Hagamos ahora el cambio de variables $z = bx^c$, $w = y/x^a$.

10.2.1. La ecuación se transforma en:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + (\beta x^\delta + \gamma)y = 0 \quad (10.4)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - 2a \\ \beta &= gb^2c^2 \\ \delta &= 2c \\ \gamma &= a^2 - c^2v^2 \end{aligned}$$

Alternativamente, si tenemos la ecuación (10.4), podemos encontrar a, b, c, g, v :

$$\begin{aligned} a &= (1 - \alpha)/2 \\ g &= \text{signo}(\beta) \\ c &= \delta/2 \\ b &= 2\sqrt{|\beta|}/\delta \\ v^2 &= \frac{(1 - \alpha)^2 - 4\gamma}{4c^2} \end{aligned}$$

Si $(1 - \alpha)^2 - 4\gamma > 0$, entonces el cambio anterior de variables la reduce a una ecuación de Bessel ($g = 1$) o de Bessel hiperbólica ($g = -1$). La solución es, por tanto, para $g = 1$, $y(x) = c_1 x^a J_v(bx^c) + c_2 x^a K_v(bx^c)$, etc.

10.2.2. La ecuación de Airy $y'' = xy$ se puede escribir en la forma (10.4) con $\alpha = 0, \beta = -1, \delta = 3, \gamma = 0$. La solución es $y(x) = c_1 x^{1/2} I_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + c_2 x^{1/2} I_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2})$.

Otro ejemplo lo ofrece la ecuación:

$$x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - n(n+1))y = 0, \quad (10.5)$$

con $n \in \mathbb{N}$. Parece de Bessel, pero no lo es (el problema es el termino $2xy'$). Es del tipo (10.4), con $\alpha = 2, \beta = 1, \delta = 2, \gamma = n(n+1)$.

10.2.3.

La solución es $y(x) = c_1 j_n(x) + c_2 y_n(x)$, siendo $j_n(x)$, $y_n(x)$ las funciones de Bessel esféricas:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (10.6)$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (10.7)$$

Estas funciones se pueden escribir en términos de funciones trigonométricas. Se demostrará por inducción que:

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad (10.8)$$

$$y_n(x) = (-1)^{n+1} x^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos x}{x} \right) \quad (10.9)$$

En particular:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \Rightarrow J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (10.10)$$

$$y_0(x) = -\frac{\cos x}{x} \Rightarrow Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

10.3. Comportamiento asintótico de las funciones de Bessel

Veremos ahora cómo se comportan las funciones de Bessel en los límites de $x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow \infty$. Para $x \rightarrow 0$ es muy sencillo, basta con tomar el término dominante en la serie de potencias que define a cada función. El término dominante es el de la potencia más baja. Si hay un término $\ln x$ este domina sobre las potencias positivas x^α pero no sobre

las negativas. Con todo esto es muy sencillo demostrar que:

$$J_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad \nu \neq n = -1, -2, -3, \dots \quad (10.11)$$

$$J_{-n}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^n x^n}{2^n n!} [1 + O(x^2)], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.12)$$

$$Y_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi} x^{-\nu} [1 + O(x^2)], \quad \nu > 0 \quad (10.13)$$

$$Y_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} (\ln x + \gamma - \ln 2) + O(x^2), \quad (10.14)$$

$$I_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} [1 + O(x^2)], \quad \nu \neq n = -1, -2, -3, \dots \quad (10.15)$$

$$I_{-n}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{2^n n!} [1 + O(x^2)], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.16)$$

$$K_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^\nu} [1 + O(x^2)], \quad \nu > 0 \quad (10.17)$$

$$K_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\ln x - \gamma + \ln 2 + O(x^2), \quad (10.18)$$

$$j_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{(2n+1)!!} [1 + O(x^2)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.19)$$

$$y_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -(2n-1)!! x^{-n-1} [1 + O(x^2)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.20)$$

Vamos ahora al comportamiento cuando $x \rightarrow \infty$. Aquí las cosas no son tan rigurosas, pero no son demasiado complicadas. Se trata de hacer el cambio de variables $y(x) = v(x)x^{-1/2}$ para obtener la ecuación:

$$v'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) v = 0. \quad (10.21)$$

Si queremos estudiar el límite $x \rightarrow \infty$ podemos reducir la ecuación a $v'' + v = 0$, de solución $v(x) = A \cos(x + \phi)$, siendo A y ϕ constantes de integración. Esto sugiere que para $x \rightarrow \infty$ la función de Bessel se comporta como $J_\nu(x) = Ax^{-1/2} \cos(x + \phi)$. Un cálculo auxiliar que utiliza una representación integral de la función de Bessel y la técnica del punto de silla de integración, da algo más concreto:

$$J_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right). \quad (10.22)$$

Para $\nu = 0$, por ejemplo, tenemos $J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, que es suficiente aproximación para $x \gtrsim 2$, como se ve en la figura.

10.3.1. Usando la definición (9.5) de la función de Weber $Y_\nu(x)$ se llega a:

$$Y_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right). \quad (10.23)$$

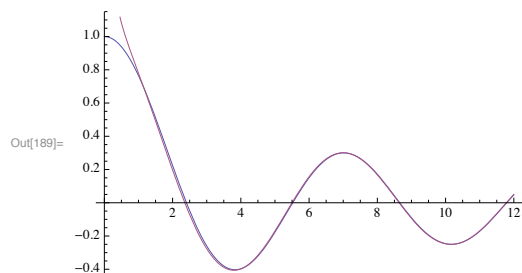
Otra vez, una aproximación razonable si $x \gtrsim 2$.

Por último, mencionaremos los comportamientos asintóticos de K_ν e I_ν , válidos para cualquier valor de ν :

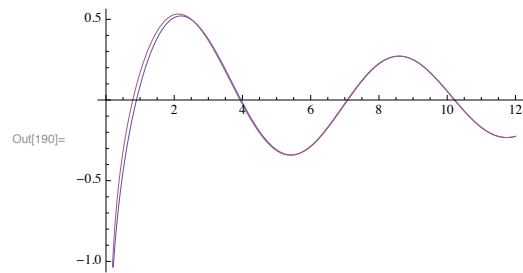
$$I_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x [1 + O(x^2)], \quad (10.24)$$

$$K_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x} [1 + O(x^2)] \quad (10.25)$$

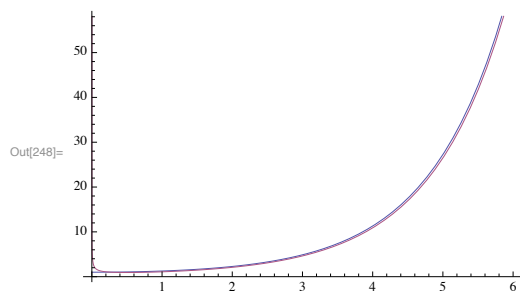
In[189]:= `Plot[{BesselJ[0, x],  $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos[x - \frac{\pi}{4}]$ }, {x, 0, 12}]`



In[190]:= `Plot[{BesselY[0, x],  $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin[x - \frac{\pi}{4}]$ }, {x, 0, 12}]`



In[248]:= `Plot[{BesselI[0, x],  $\sqrt{\frac{1}{2 \pi x}} \text{Exp}[x]$ }, {x, 0, 6}]`



In[250]:= `Plot[{BesselK[0, x],  $\sqrt{\frac{\pi}{2 x}} \text{Exp}[-x]$ }, {x, 0, 6}]`

