Capítulo 1

1.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial tiene como incógnita una función y que puede depender de una, $y(x)$, o de más variables independientes, $y(x_1, \ldots, x_n)$. En la ecuación diferencial, como su nombre indica, aparecen la función y y sus distintas derivadas, bien totales como $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}, y^{(iv)} = \dfrac{d^4y}{dx^4}$, etc. en el caso de una variable, o bien derivadas parciales como $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}, \dfrac{\partial^3 y}{\partial x_2 \partial x_3^2}$, etc.

El lenguaje de la física es en muchas ocasiones el lenguaje de las ecuaciones diferenciales y son interminables los ejemplos que se pueden dar. Dos de los más típicos son la ecuación del péndulo para el ángulo en función del tiempo $\theta(t)$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta, \tag{1.1}$$

siendo ℓ la longitud del péndulo y g la aceleracion de la gravedad. El otro ejemplo es para una función de tres variables $T(x, y, t)$ que representa la temperatura T en función del tiempo t en el punto (x, y) de una lámina metálica:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.2}$$

donde α es la difusividad que es una característica del metal.

En este curso sólo nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales que involucran una función de una única variable, o ecuaciones diferenciales ordinarias. Podemos tener, sin embargo, más de una función incógnita $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$, de la variable independiente x y entonces hará falta más de una ecuación diferencial para poder determinarlas, es decir, un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, si $n_1(t)$ representa la población de conejos y $n_2(t)$ la poblacción de zorros en función del tiempo, el sistema de ecuaciones que satisfacen estas funciones se conoce con el nombre de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= an_1 - bn_1n_2, && (1.3) \\ \frac{dn_2}{dt} &= -cn_2 + dn_1, && (1.4) \end{aligned}$$

siendo a, b, c, d parámetros.

Un importante concepto es el de **orden** de una ecuación diferencial que es el orden de la máxima derivada que aparece en la ecuación. En el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales, el orden es la suma de los órdenes de cada una de las ecuaciones diferenciales. Así, las ecuaciones (1.1), (1.2) y el sistema (1.3-1.4) son de orden 2, mientras que la ecuación diferencial:

$$y'' + (y' \sin x)^2 + y^{(iv)} = 0, \tag{1.5}$$

es de orden 4.

1.1.1. Encontrar el orden del sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones $f(x), g(x, y)$:

$$\frac{df}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial y} = f \tag{1.7}$$

Cualquier ecuación diferencial ordinaria de orden n se puede escribir como un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de orden 1. Lo más claro es verlo con un ejemplo.

1.1.2. Tomemos la ecuación (1.5) y hagamos las siguientes definiciones: $y_1(x) \equiv y(x)$, $y_2(x) \equiv y'(x)$, $y_3(x) \equiv y''(x)$, $y_4(x) \equiv y'''(x)$. Demostrar que resolver (1.5) es completamente equivalente a resolver:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 \tag{1.8}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_3 \tag{1.9}$$

$$\frac{dy_3}{dx} = y_4 \tag{1.10}$$

$$\frac{dy_4}{dx} = -y_3 - (y_2 \sin x)^2 \tag{1.11}$$

Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos grandes grupos: **lineales** y **no lineales**, según que la función incógnita y (o las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_m$ cuando haya más de una) y todas sus derivadas aparezcan de manera lineal o no. Lineal quiere decir que $y(x)$ no puede aparecer bajo ninguna potencia o función. En el caso de muchas funciones

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ esto excluye también que aparezcan productos como, por ejemplo, $y_1 y_3$. Veremos más adelante que, en general, las ecuaciones diferenciales lineales son mucho más sencillas de resolver que las no lineales aunque hay ecuaciones lineales muy difíciles de resolver y ecuaciones no lineales muy sencillas de resolver. Ejemplos de ecuaciones lineales son:

$$3y' + 2xy = 0, \quad (1.12)$$
$$\cos(x)y'' + e^x y = 0, \quad (1.13)$$

y de no lineales:

$$\cos(x)y' + \sin(y) = 0, \quad (1.14)$$
$$y'^2 + 2y = 0, \quad (1.15)$$

1.1.3. Clasificar todas las ecuaciones o sistemas de ecuaciones escritas hasta ahora en lineales o no lineales.

1.2. Solución de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial puede tener más de una solución. Por ejemplo

$$y'' + y = 0 \quad (1.16)$$

tiene como soluciones

$$y(x) = \sin(x), \quad (1.17)$$
$$y(x) = 2\cos(x), \quad (1.18)$$
$$y(x) = \sin(x) - \cos(x), \quad (1.19)$$

entre muchas otras. Notemos que las soluciones son válidas para $x \in (-\infty, +\infty)$. Otro ejemplo, la ecuación

$$y'' - 4y = 0 \quad (1.20)$$

tiene como soluciones

$$y(x) = \exp(2x), \quad (1.21)$$
$$y(x) = \exp(-2x), \quad (1.22)$$
$$y(x) = \exp(2x) - 2\exp(-2x). \quad (1.23)$$

Más, la ecuación:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (1.24)$$

1.2.1. tiene como soluciones, entre otras,

$$y(x) = x^2, \tag{1.25}$$
$$y(x) = x^2 \ln(x), \tag{1.26}$$
$$y(x) = x^2 \ln(-x). \tag{1.27}$$

La primera es válida para $x \in (-\infty, +\infty)$, la segunda para $x \in (0, +\infty)$, y la tercera para $x \in (-\infty, 0)$. Un último ejemplo,

1.2.2. la ecuación

$$y' = xy^3, \tag{1.28}$$

tiene, entre otras, las soluciones:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+1}} \tag{1.29}$$
$$y(x) = \frac{-1}{\sqrt{-x^2-1}} \tag{1.30}$$

la primera es válida para $x \in (-1, 1)$ y la segunda, aunque formalmente parece satisfacer la ecuación diferencial, no es válida para ningún valor de x. Puede ocurrir que una ecuación diferencial no tenga ninguna solución, pero ahora no se me ocurre ningún ejemplo. Lo más común es que una ecuación diferencial tenga muchas soluciones y el problema de verdad es el de elegir entre las posibles soluciones. Normalmente esto requiere dar *condiciones adicionales* a la propia ecuación diferencial. Por ejemplo, si yo digo que busco una solución de la ecuación 1.16 que cumpla la condición $y(0) = 1$ todavía puedo encontrar muchas soluciones: $y(x) = \cos(x)$, $y(x) = \cos(x) - \sin(x)$, $y(x) = \cos(x) + 3\sin(x)$, etc. Si ahora impongo las condiciones $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$, sólo hay una solución $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Si impongo las condiciones $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$, no hay ninguna solución de la ecuación diferencial.

Si ahora busco soluciones de (1.20) que satisfagan $y(0) = 1$ y que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, sólo tenemos la solución $y(x) = \exp(-2x)$. Si impongo la condición adicional $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, sólo encuentro la solución $y(x) = 0$, y si impongo $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, no tengo ninguna solución.

La moraleja de estos ejemplos es que una ecuación puede tener muchas soluciones, cada una en su rango de validez de la variable independiente x. Para seleccionar sólo una solución hemos de dar condiciones adicionales, pero hay que tener cuidado con las condiciones adicionales que damos. Pudiera ser que no hubiera ninguna solución que satisfaciera la ecuación diferencial y nuestras condiciones adicionales.

En física pensamos que un problema tiene solución única. Si la función $x(t)$ representa la trayectoria de un proyectil lanzado por un cañón, el punto de impacto es único si repetimos el experimento en igualdad de condiciones. El perfil de temperaturas de una barra cuyos extremos están en dos temperaturas dadas también es único y repetible. Por tanto, nos interesa especificar en qué condiciones **existe una solución única**. El tipo de condiciones que son naturales en física son, muy mayoritariamente, de dos tipos: **condiciones iniciales** y **condiciones de contorno**. Condiciones iniciales es cuando especificamos qué debe valer la función y quizás algunas de sus derivadas en un solo punto x_0 dado. Las condiciones de contorno es cuando decimos qué vale la función en una serie de puntos $x_1, x_2, \ldots$ quizás incluyendo $x = \pm\infty$. Un ejemplo típico de condiciones iniciales es el problema del proyectil mencionado antes: la trayectoria está completamente determinada si damos la posición del cañón y la velocidad inicial. En el problema de la distribución de temperaturas en la barra, lo más usual es dar la temperatura en ambos extremos de la barra, es decir, las condiciones de contorno. En este curso, solo nos van a interesar los problemas en los que damos una condición inicial. Los problemas con condiciones de contorno se tratan en otra asignatura.

¿Cómo podíamos decir de manera tan segura en los ejemplos anteriores que había una única solución o que no había ninguna solución o que había muchas soluciones? La respuesta la da un teorema que nos asegura que el problema de condiciones iniciales tiene solución única bajo unas determinadas condiciones. Antes de ver ese teorema conviene ver una serie de ejemplos de ecuaciones diferenciales y sus posibles soluciones. Vamos a ver dos familias de ecuaciones diferenciales en las que es posible encontrar de manera sistemática y fácil todas las soluciones y luego ya iremos complicando el asunto.

1.3. Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separadas

Éstas son muy sencillas. Son aquéllas que tienen la forma general

$$y' = f_1(x) f_2(y) \tag{1.31}$$

siendo $f_1(x)$ y $f_2(y)$ funciones conocidas. La solución es muy sencilla. Escribamos $y' = \dfrac{dy}{dx}$, reorganicemos

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx \tag{1.32}$$

e integremos,

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx. \tag{1.33}$$

Sabemos que al integrar saldrán constantes aditivas arbitrarias en el lado derecho e izquierdo, constantes que agruparemos en una sola. Un ejemplo es:

$$y' = x^3 y^2, \tag{1.34}$$

1.3.1. cuya solución es:

$$y(x) = \frac{-4}{x^4 + C} \tag{1.35}$$

Esta es toda la familia de soluciones de la ecuación diferencial. Depende de un parámetro C. Como hemos dicho, una solución concreta de esta familia (es decir, un valor de C) se puede determinar unívocamente si damos una condición inicial. Por ejemplo, impongamos que $y(0) = 1$.

1.3.2. esto nos lleva a la solución,

$$y(x) = \frac{4}{4 - x^4}. \tag{1.36}$$

Si ahora imponemos la condición $y(1) = 1$ tenemos la solución

$$y(x) = \frac{4}{5 - x^4}. \tag{1.37}$$

o, si imponemos $y(1) = 0$ tenemos la solución $y(x) = 0$, una solución bien sencilla y única para esta condición inicial.

Normalmente, estas ecuaciones en variables separadas no tienen más complicación. Hay casos en los que primero se requiere un pequeño truco para convertir una ecuación que no lo es en una ecuación de variables separadas. Estos trucos sólo se aprenden con la práctica y no hay más remedio que hacer muchos ejercicios para aprender.

1.3.3. Por ejemplo, considerar la ecuación

$$y' = (x + y)^2 x - 1, \tag{1.38}$$

que no es de variables separadas. Pero si hacemos el cambio $z = y + x$ se puede convertir en una de variables separadas cuya familia de soluciones es

$$y = \frac{-2}{x^2 + C} - x. \tag{1.39}$$

1.4. Ecuaciones diferenciales de primer orden lineales

La ecuación más general de este tipo es:

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{1.40}$$

siendo $p(x)$ y $g(x)$ funciones dadas. En este caso, vamos a imponer ya la condición inicial aribitraria $y(x_0) = y_0$ y vamos a resolver la ecuación con la condición inicial a la misma vez. La técnica es bien conocida desde hace siglos (Newton y Leibniz ya sabían hacerlo). Se trata de multiplicar a derecha e izquierda por

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} ds\, p(s)\right). \tag{1.41}$$

1.4.1. La ecuación resultante se puede escribir como:

$$y'\mu + y\mu' = g\mu, \tag{1.42}$$

o

$$(y\mu)' = g\mu, \tag{1.43}$$

Si ahora integramos entre x_0 y x y usamos que $\mu(x_0) = 1$, $y(x_0) = y_0$, llegamos a la solución:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{x_0}^{x} ds\, g(s)\mu(s) + y_0\right] \tag{1.44}$$

que resuelve el problema de la ecuación diferencial y la condición inicial. Vemos que no hay ninguna arbitrariedad en ningún paso y, por tanto, la solución encontrada es la única que existe.

1.4.2. Caso práctico. Sea el problema de condiciones iniciales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& -xy + 4x, \\ y(1) &=& 2. \end{array}\right. \tag{1.45}$$

Calculamos primero $\mu(x) = \exp((x^2 - 1)/2)$. La (única) solución es entonces

$$y(x) = 4 - 2\exp((1 - x^2)/2). \tag{1.46}$$

1.4.3. Encontrad la familia de soluciones de

$$y' = -xy + 4x \tag{1.47}$$

dependientes de un parámetro C. Imponed entonces la condición inicial $y(1) = 2$ y recuperad la solución anterior.