

Jornadas La mujer: elemento innovador en la ciencia

13 Diciembre 2007

Las variedades invariantes del océano

Ana M. Mancho

Instituto de Ciencias Matemáticas, CSIC



- ✓ **Motivación**
- ✓ **El problema matemático**
- ✓ **Aplicaciones al océano**
- ✓ **De lo que no he hablado..**

Importancia de la dispersión, mezcla y confinamiento de partículas en un fluido



✓ Oceanografía

Las corrientes marinas de superficie inciden en dispersión o confinamiento de algas o fitoplancton en superficie.

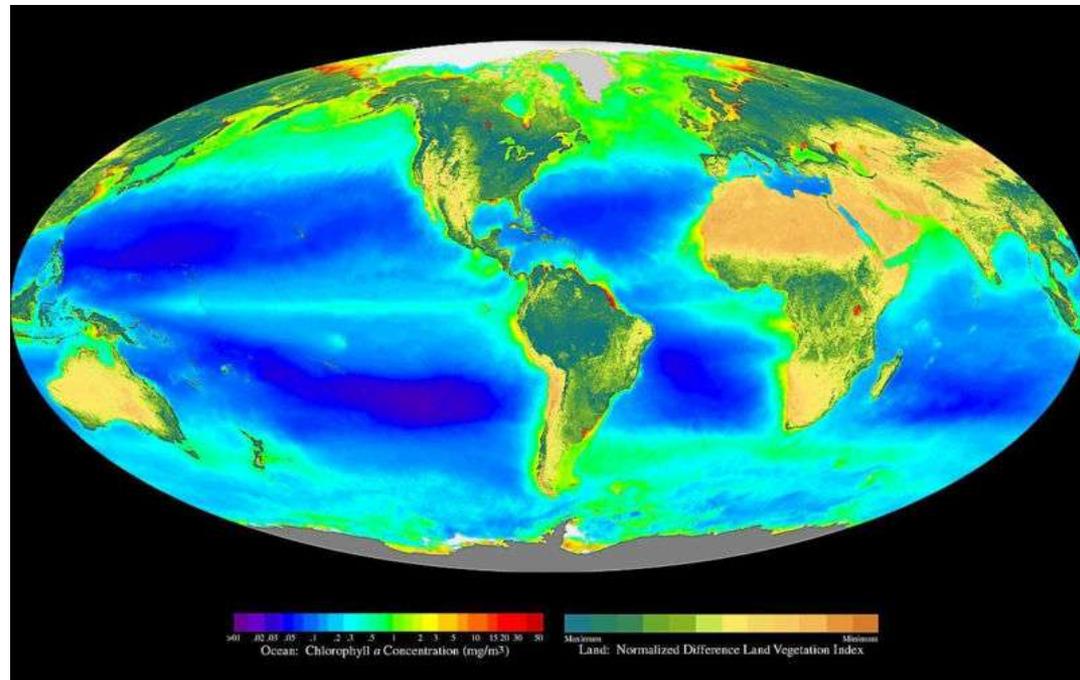
Esto afecta a los *blooms* de estos seres vivos que realizan un porcentaje altísimo de la función clorofilíca de todo el planeta → inciden directamente en la fijación del CO₂

→ inciden en la regulación calentamiento global

(Anthony F. Michaels, Highly Active Eddies, Science 316 992-993, 18 May 2007)

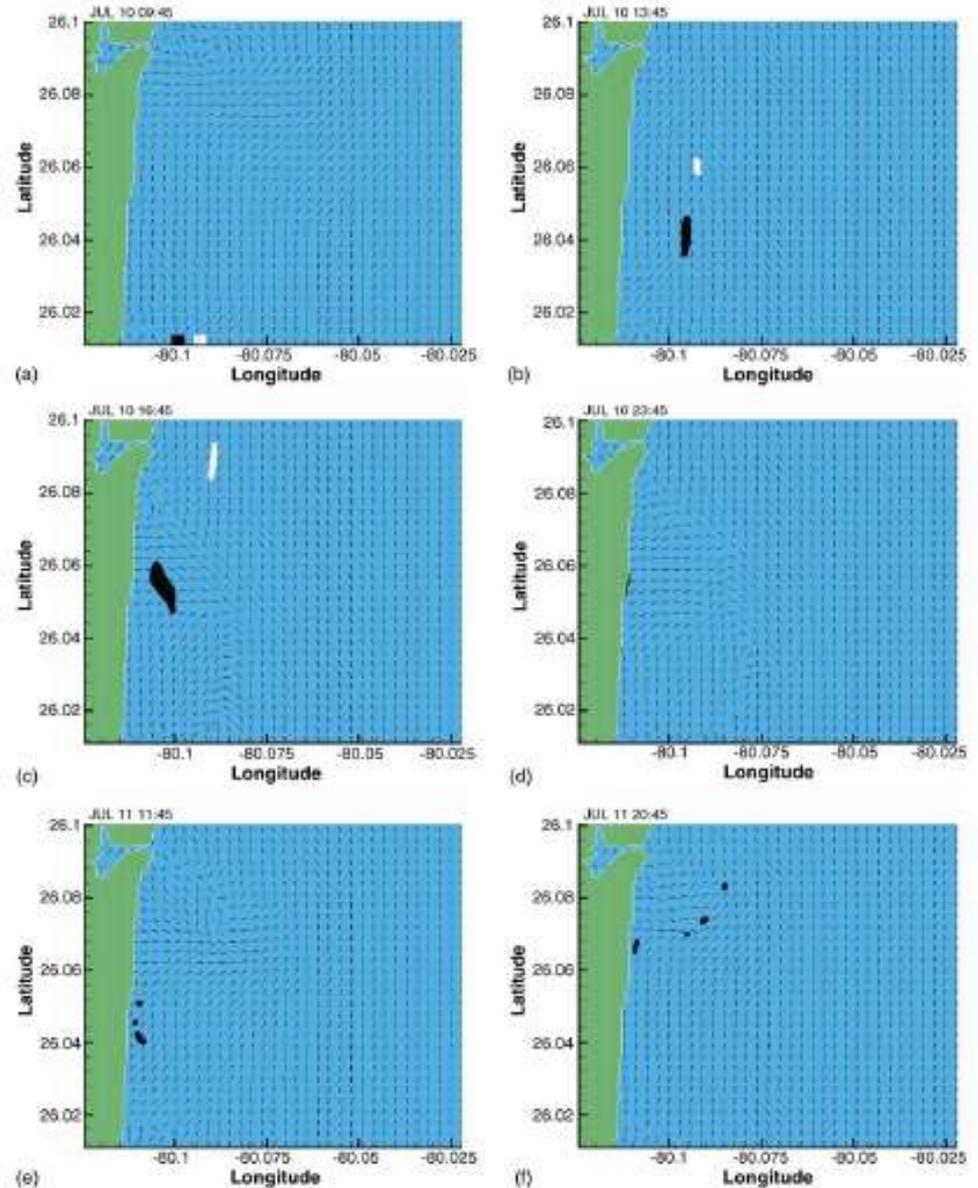
Además están en la base de la cadena trófica marina

SeaWiFS Project, NASA/Centro de vuelo espacial Goddard de la NASA y ORBIMAGE



Las corrientes marinas de superficie inciden en la dispersión en costas de contaminantes vertidos por barcos o ríos, o salmuera vertidas por una planta desaladora

Francois Lekien, Chad Coulliette, Arthur J. Mariano, Edward H. Ryan, Lynn K. Shay, George Haller and Jerry Marsden. Pollution release tied to invariant manifolds: A case study for the coast of Florida *Physica D* 210 (2005) pp1-20



La dinámica vertical del océano incide en la mezcla de sus distintos estratos: abajo-arriba → transporte de nutrientes desde el fondo marino, o de arriba-abajo → sedimentación de partículas de superficie en las se fija el CO_2 y que al depositarse en el fondo lo eliminan del medio

Nature Correspondence James E. Lovelock and Chris G Rapley Ocean pipes could help the Earth to cure itself.

✓ Microfluidos

Fluidos en dispositivos muy pequeños (del orden de micras). Se aplican en: enfriamiento de dispositivos electrónicos, impresoras de chorro de tinta, industria aeroespacial, industria biomédica.

Lab-on-a-chip

Elimina pruebas clínicas en laboratorios centrales
Permite análisis móviles

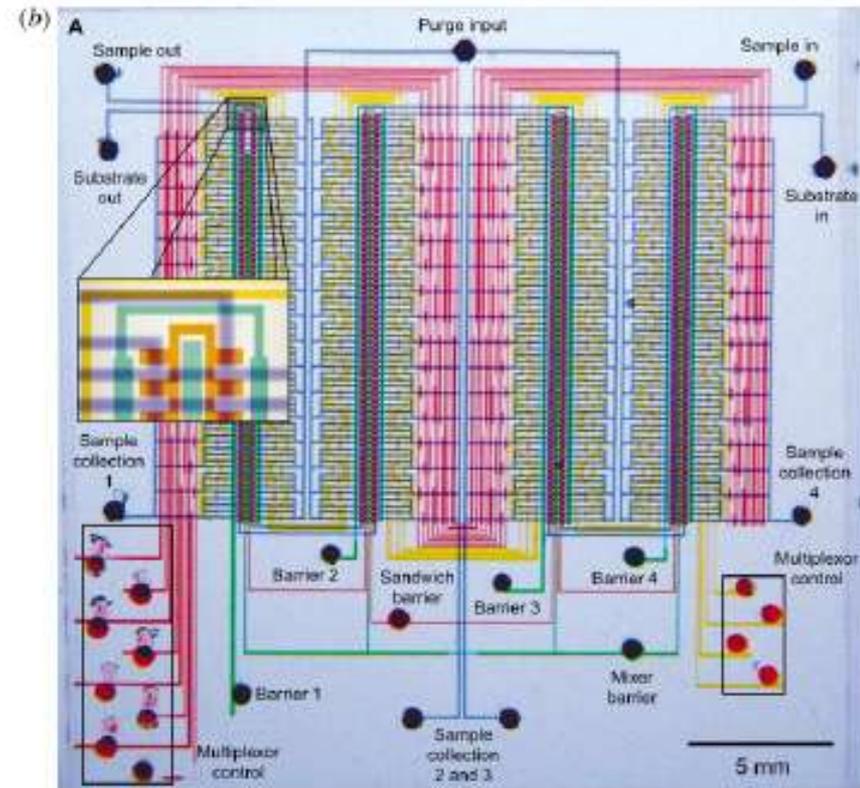


Foto de Stone, Stroock, Ajdari
Ann. Rev. Fluid Mech. 36 2004 pp 381-411

Microarrays de DNA

Conjunto muy elevado de genes de DNA dispuestos en una placa con estructura matricial y que se utiliza para hibridaciones genómicas comparativas

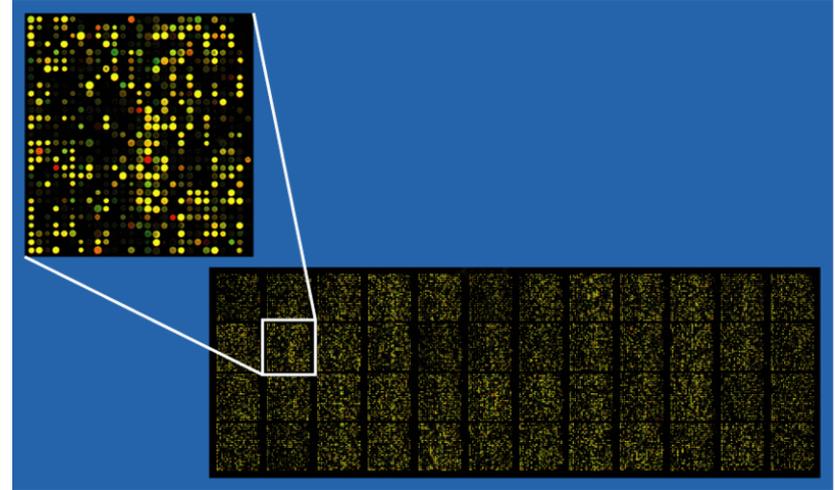


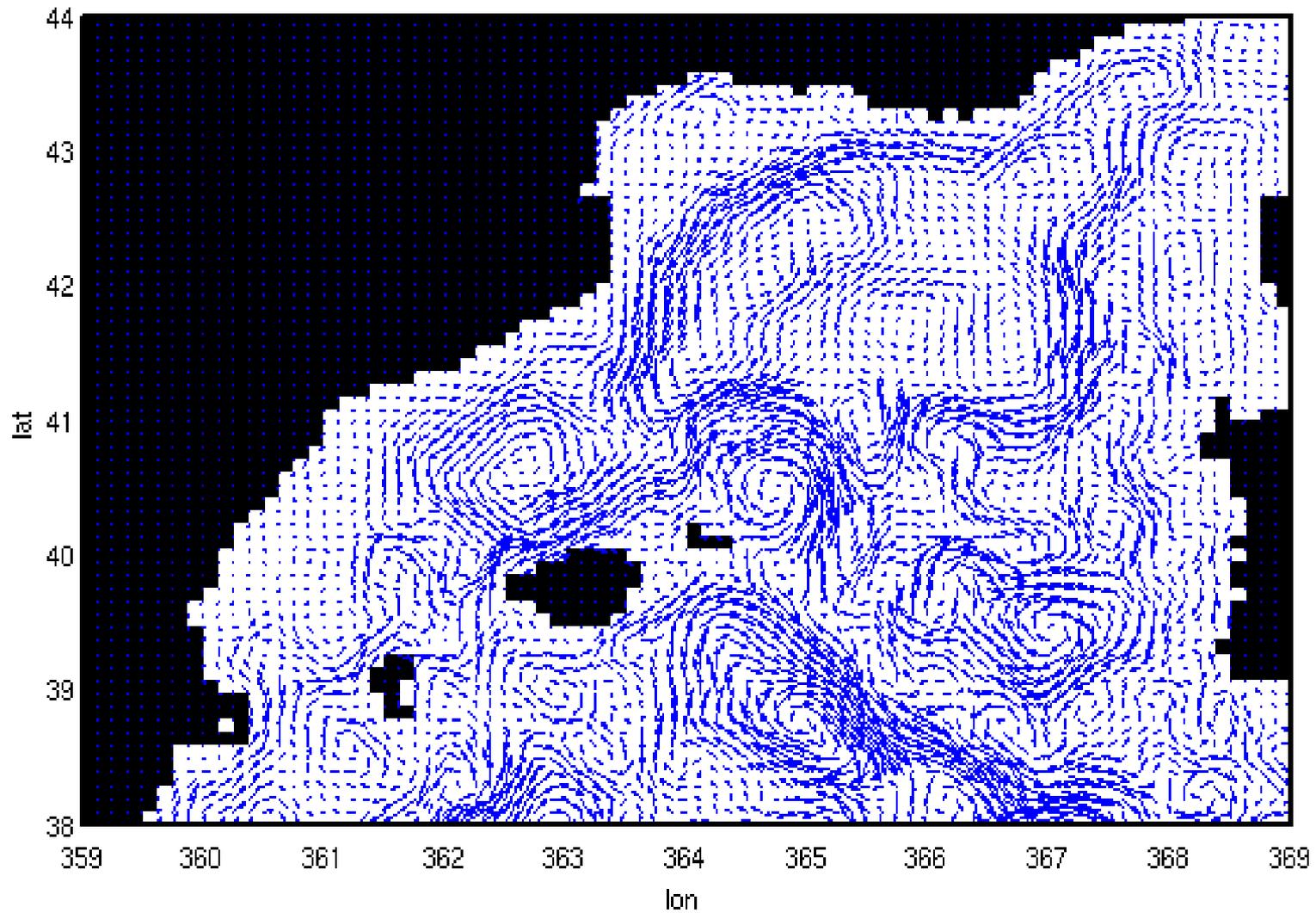
Foto Wikipedia

¿Cómo mezclar en microcanales?

- El correcto funcionamiento de los microdispositivos depende del mezclado de fluido que contienen.
- El fluido evoluciona en régimen laminar. No hay turbulencia. Uniformizar los componentes es problemático pero se puede conseguir induciendo una dinámica adecuada al fluido que induzca un óptimo mezclado de las partículas.

Sturman, Ottino, Wiggins. The Mathematical Foundations of Mixing. Cambridge University Press (2006)

Campo de velocidades



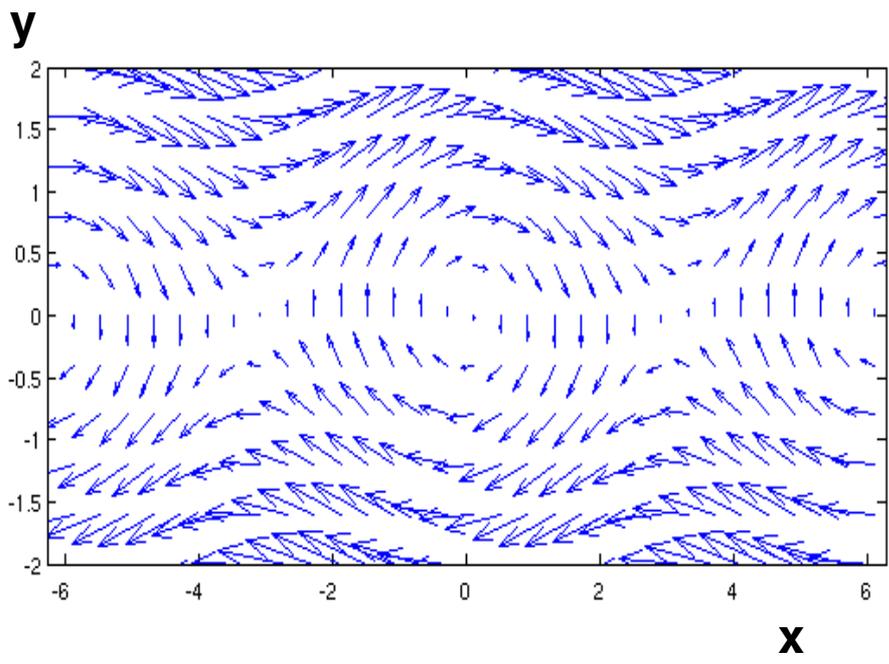
¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades?

Muchas partículas de betadine en un fluido agitado

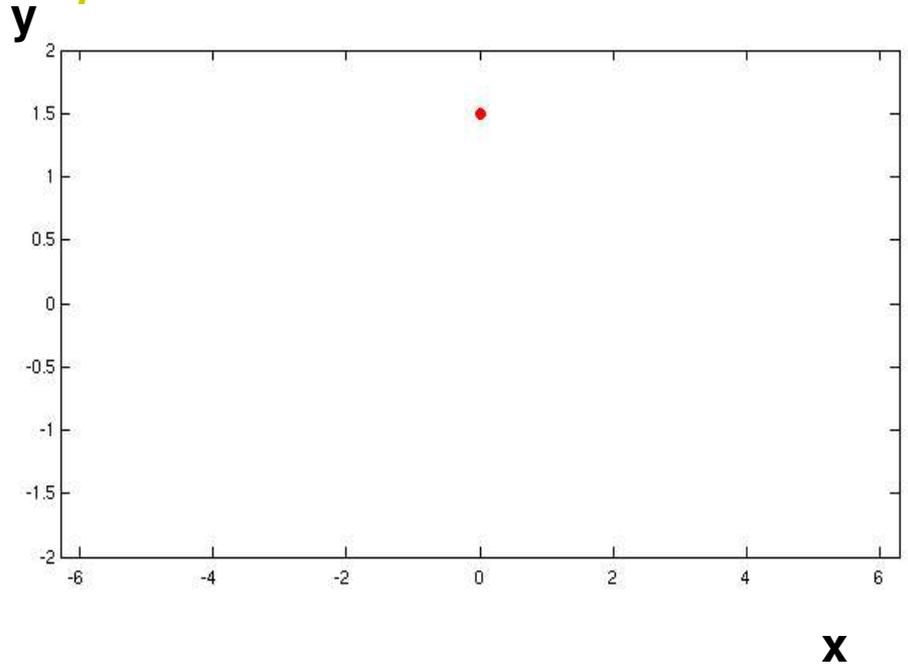


¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Campo estacionario
No cambia en el tiempo



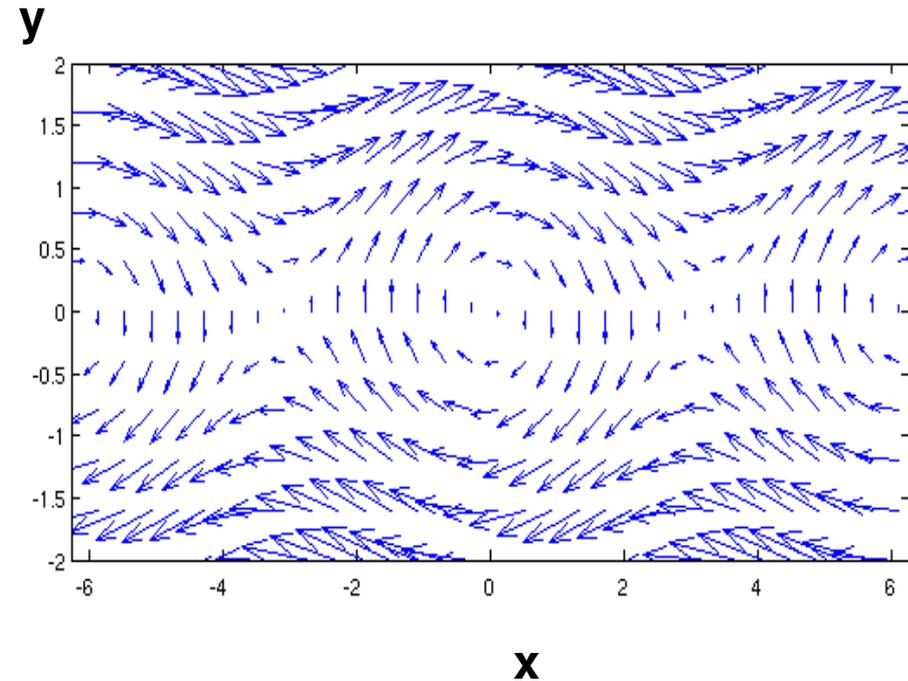
Solución para una **condición inicial**. Se representa en el **espacio de las fases**



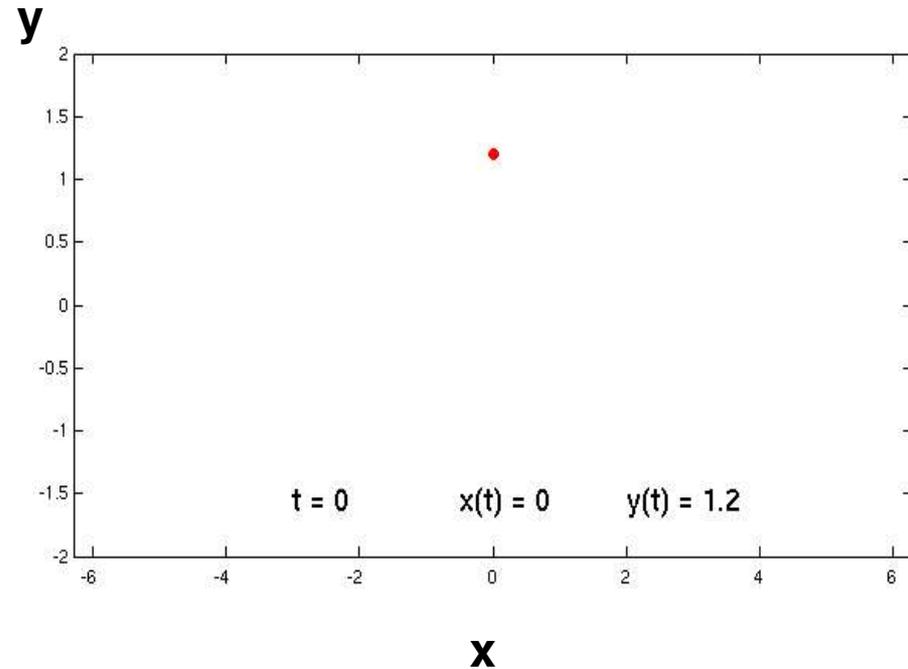
El campo de velocidades $v_x(x,y)$, $v_y(x,y)$ no depende del tiempo

¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Campo estacionario



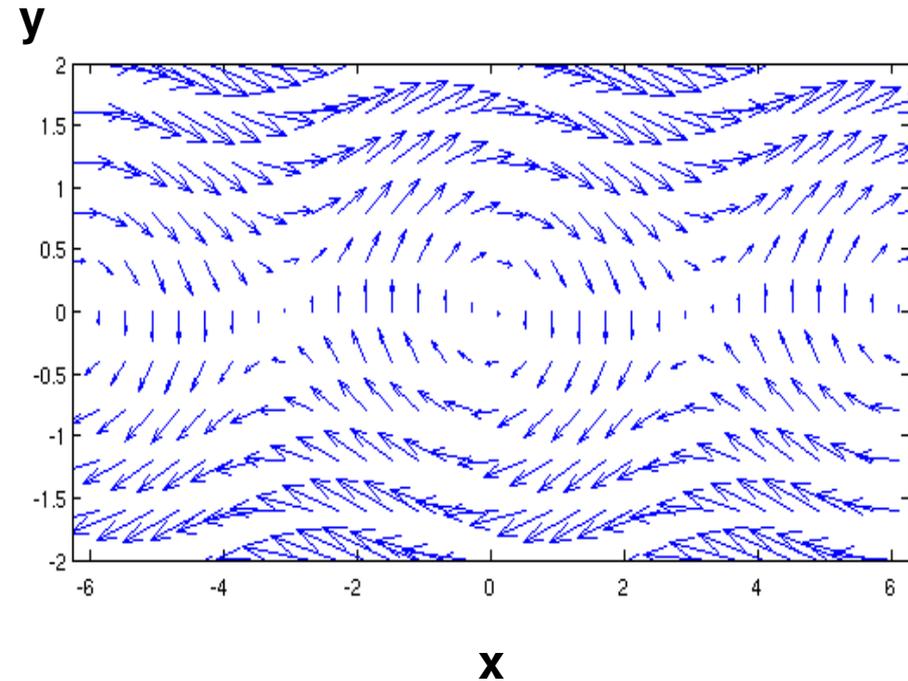
Solución para otra condición inicial.



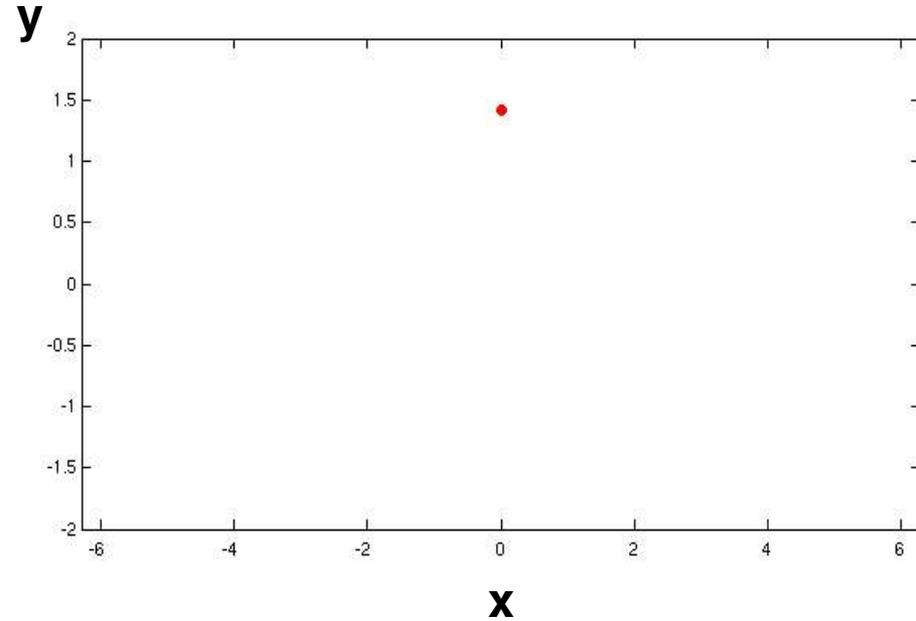
El movimiento de la partícula o *trayectoria de la partícula* se denota $x(t)$ $y(t)$,
La animación muestra para cada instante de tiempo t , la posición $\{x(t), y(t)\}$

¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Campo estacionario



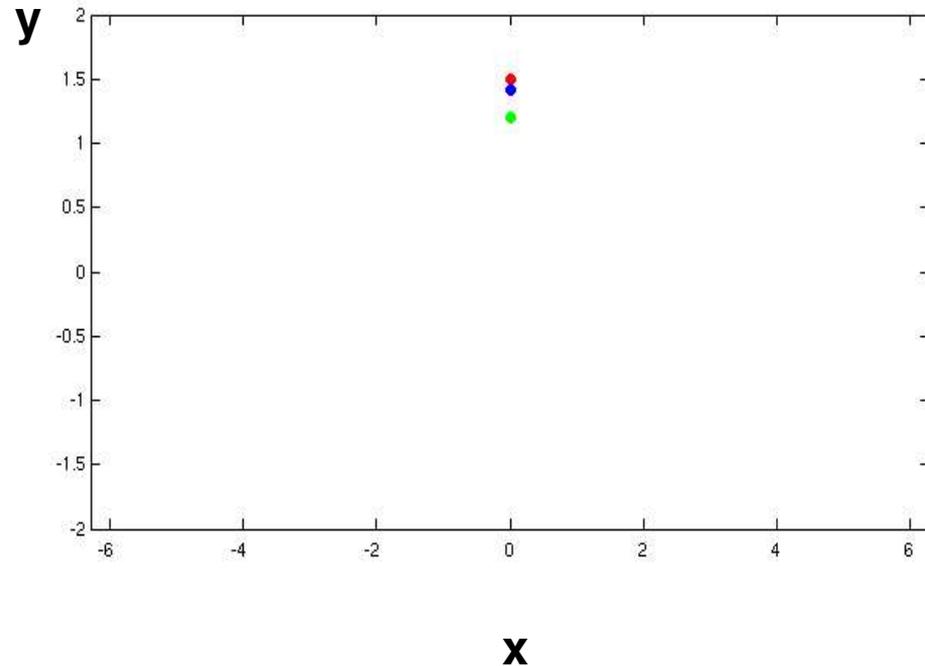
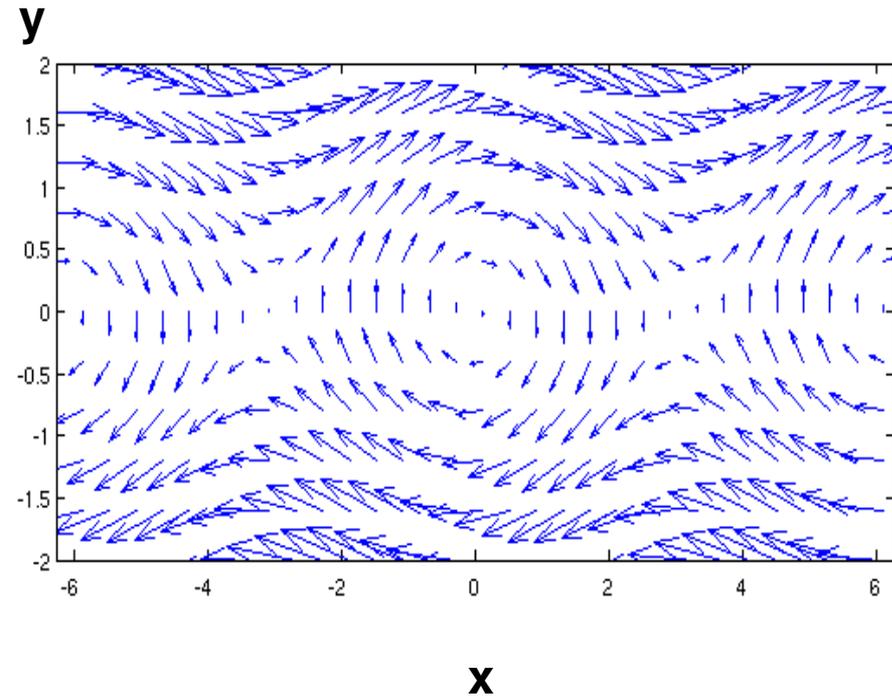
Solución para una tercera condición inicial.



¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Campo estacionario

Distintas *condiciones iniciales* evolucionan de manera distinta.



¿Cómo evolucionan conjuntos de condiciones iniciales?

¿Habrá algún método para averiguar cómo van a evolucionar no una sino montones de condiciones iniciales?

¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Campo estacionario

La **trayectoria** $x(t)$, $y(t)$ es tangente al campo de velocidades.
Matemáticamente este problema se formula así

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y)$$



Componente x de la velocidad v_x

$$\frac{dy}{dt} = v_y(x, y)$$



Componente y de la velocidad v_y

El campo de velocidades $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$ no depende del tiempo

Para distintas condiciones iniciales $\{x_0, y_0\}$ este sistema de 2 **ecuaciones diferenciales** permite integrar distintas trayectorias.

Es decir podemos conocer dónde va a estar la partícula en el futuro si sabemos donde está al comienzo

¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

- ¿Habrá algún método para averiguar cómo van a evolucionar no una sino montones de condiciones iniciales?
- ¿Cómo evolucionan conjuntos de condiciones iniciales?

IDEA: Buscar *objetos geométricos* en el espacio de fases (que es el plano $\{x,y\}$) que ayuden a conocer la evolución de muchas condiciones iniciales.

Esta idea la desarrollamos con ayuda de la expresión matemática:

$$\frac{dx}{dt} = y$$



Componente x de la velocidad v_x

$$\frac{dy}{dt} = -0.5 \operatorname{sen}(x)$$



Componente y de la velocidad v_y

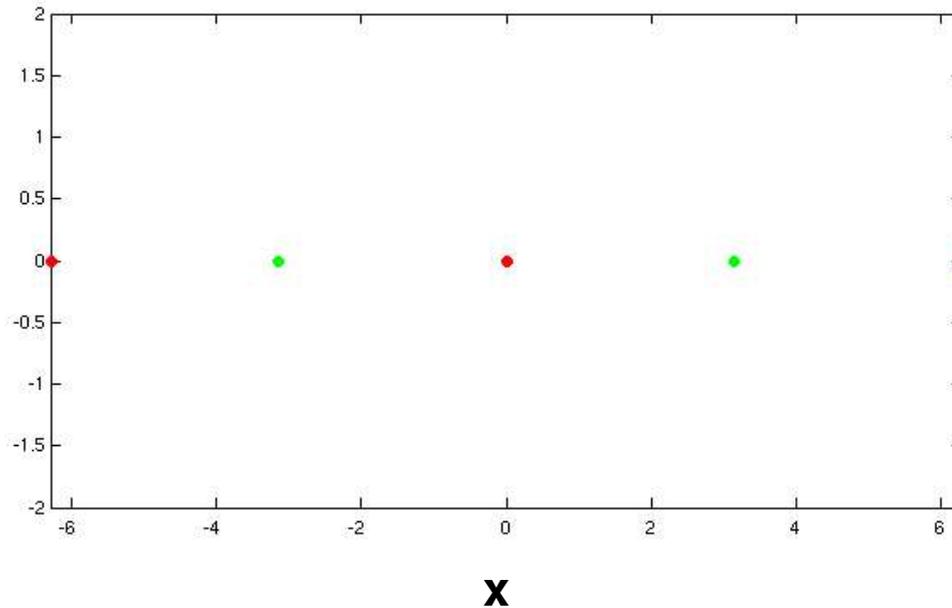
Puntos de equilibrio. Aquellos en que $v_x=0$ $v_y=0$.

$y = 0$, $x = n\pi$ con $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$

¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Puntos de equilibrio

y



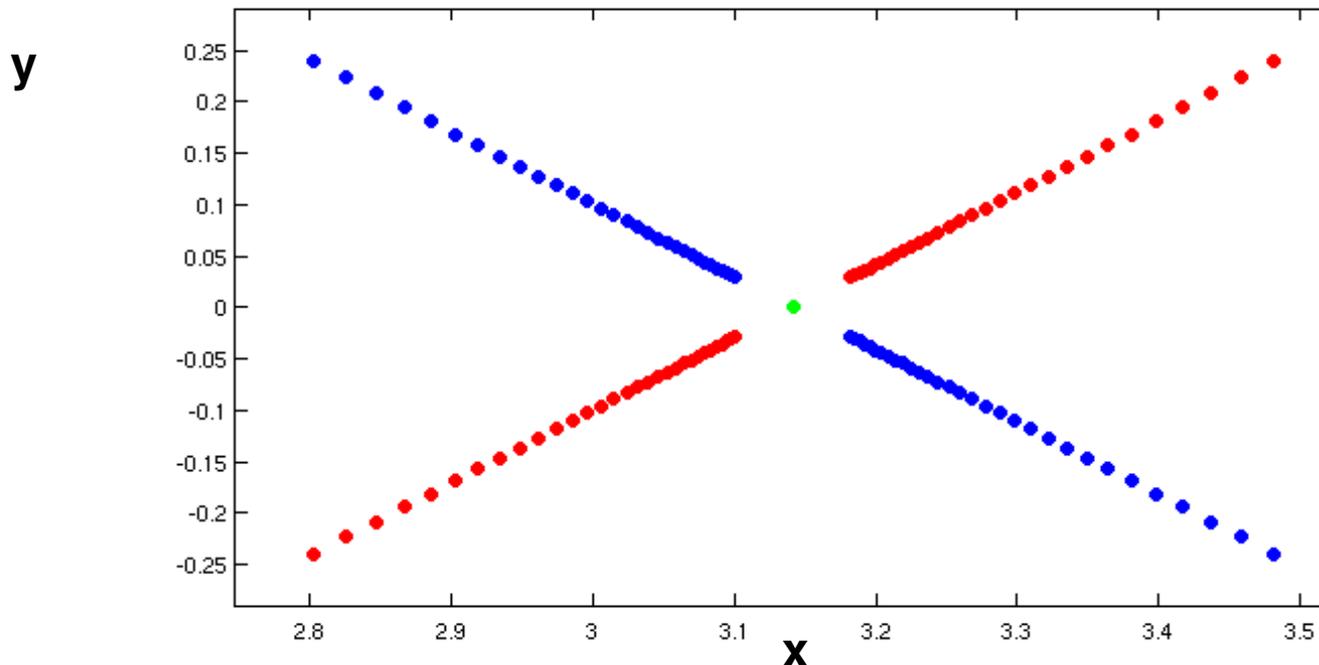
Si la partícula al inicio está sobre el punto de equilibrio *no se moverá de allí.*

Hay dos tipos de puntos de equilibrio. Los verdes son *puntos de equilibrio hiperbólicos*

¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Punto de equilibrio hiperbólico

Un punto de equilibrio es *hiperbólico* si el campo de velocidades linealizado en torno a él tiene dos soluciones linealmente independientes, una que en tiempo tendiendo a **menos infinito** se acerca exponencialmente a él en una dirección que llamamos inestable y otra que en tiempo **mas infinito** se acerca exponencialmente hacia el en la dirección estable



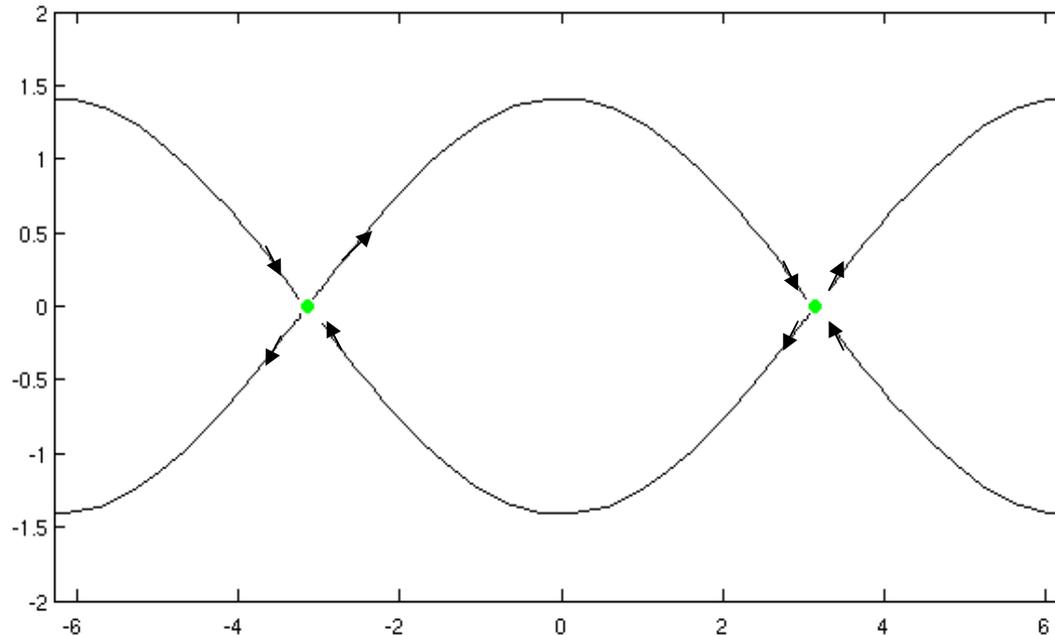
¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades?

Variedad inestable de un punto de equilibrio hiperbólico (en rojo)

Está formada por el conjunto de condiciones iniciales que en tiempo menos infinito se acercan infinitamente al punto de equilibrio

Variedad estable de un punto de equilibrio hiperbólico (en azul)

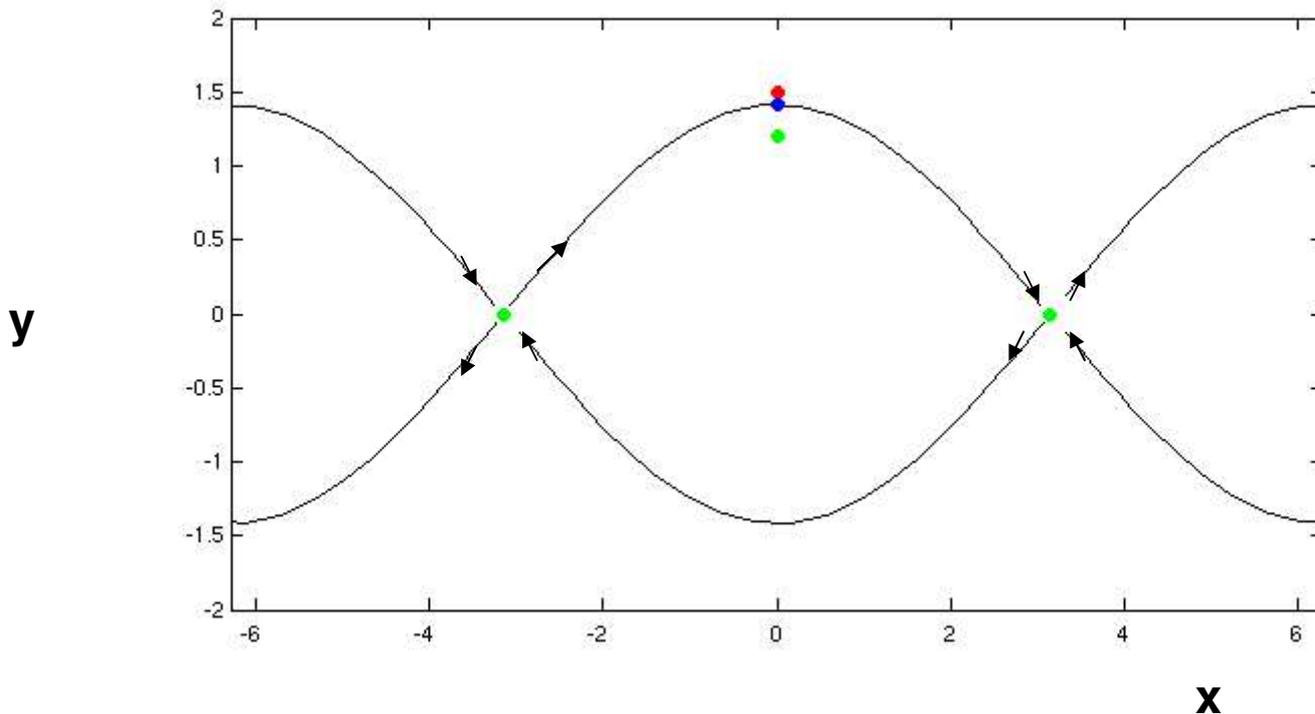
Está formada por el conjunto de condiciones iniciales que en tiempo mas infinito se acercan infinitamente al punto de equilibrio



¿Cómo se mueven *muchas partículas* en un campo de velocidades?

Implicaciones de la variedad inestable y estable.

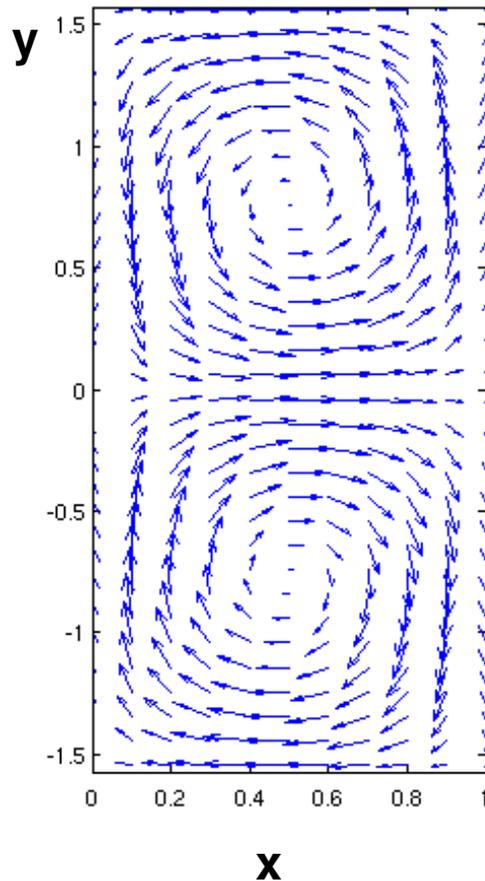
Las variedades son barreras al transporte. Las partículas no las cruzan



CONCLUSIÓN: Conocer los puntos de equilibrio y sus variedades estables e inestables ha sido útil para construir un esqueleto geométrico que ayuda a conocer de un golpe de vista como evolucionan muchas condiciones iniciales en un campo de vectores.

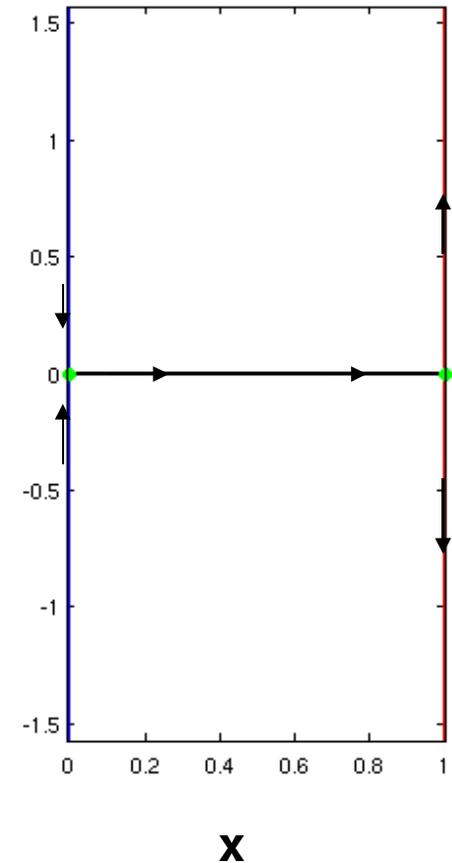
¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades?

Campo estacionario.
Modelo Rayleigh-Bénard



Variedades estables e inestables

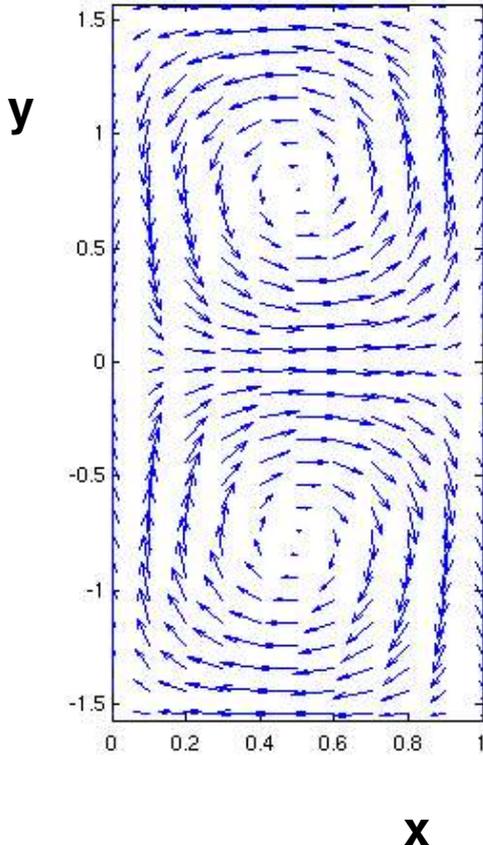
y



¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

Campo no estacionario periódico.
 El campo de vectores depende del tiempo $v_x(x,y,t)$, $v_y(x,y,t)$

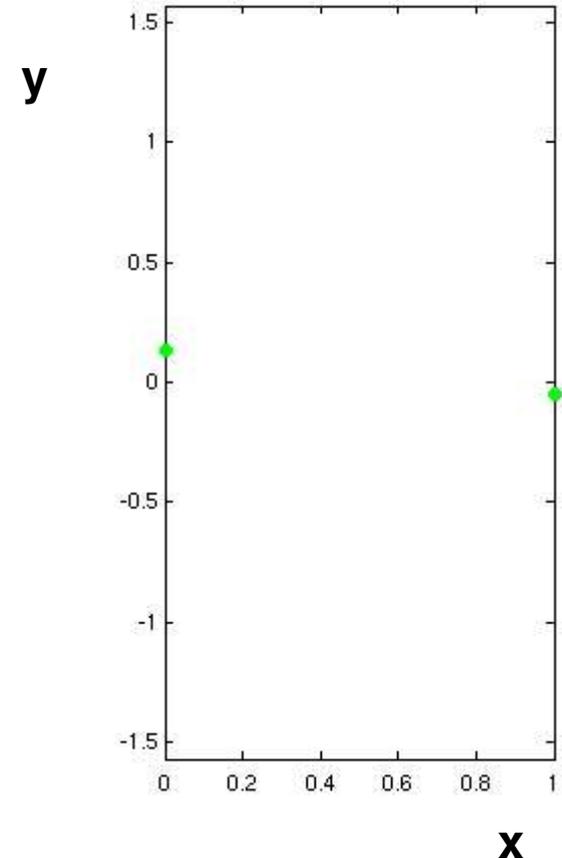
Trayectorias periódicas hiperbólicas. Generalizan puntos de equilibrio hiperbólicos



Campo periódico

$$v_x(x, y, t) = v_x(x, y, t + T)$$

$$v_y(x, y, t) = v_y(x, y, t + T)$$



¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

Trayectorias hiperbólicas periódicas NO coinciden con los puntos de estancamiento instantáneos.

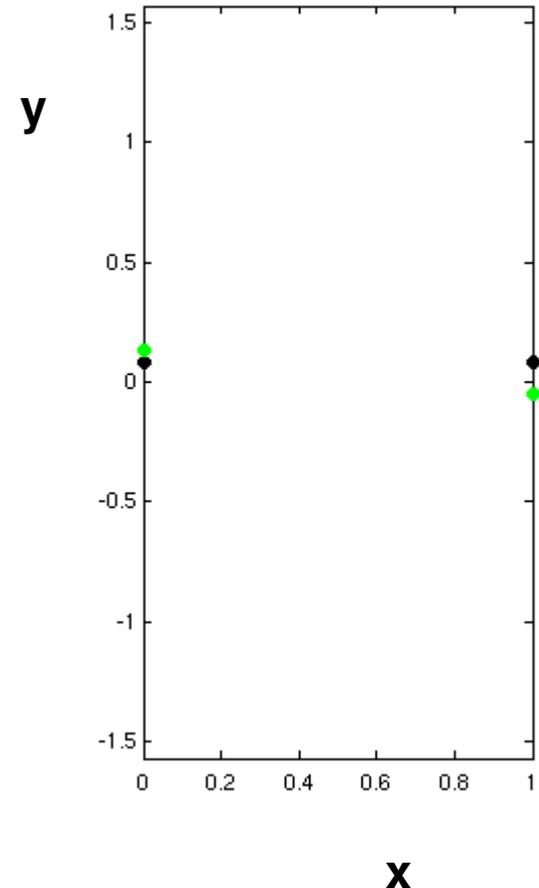
Verde, trayectoria hiperbólica periódica

Negro, punto estancamiento instantáneo

Puntos de estancamiento

$$v_x(x,y,t)=0 \quad v_y(x,y,t)=0$$

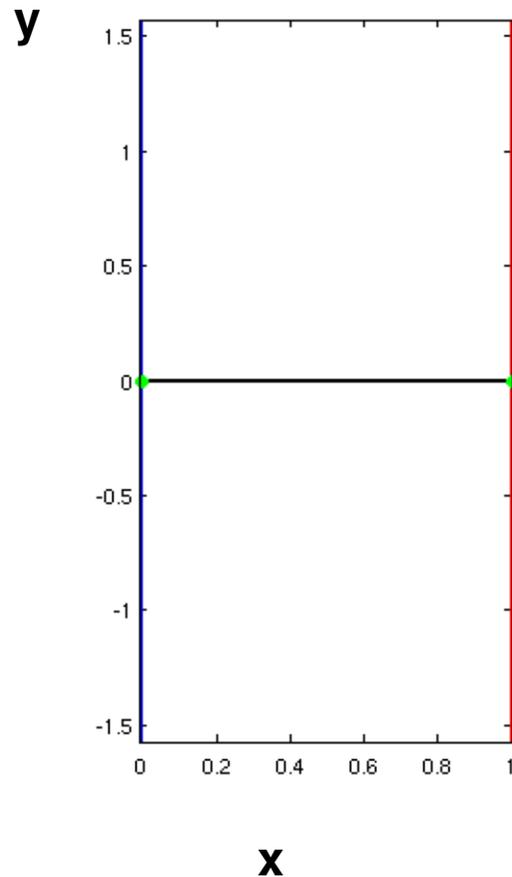
No son solución



¿Cómo se mueve muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

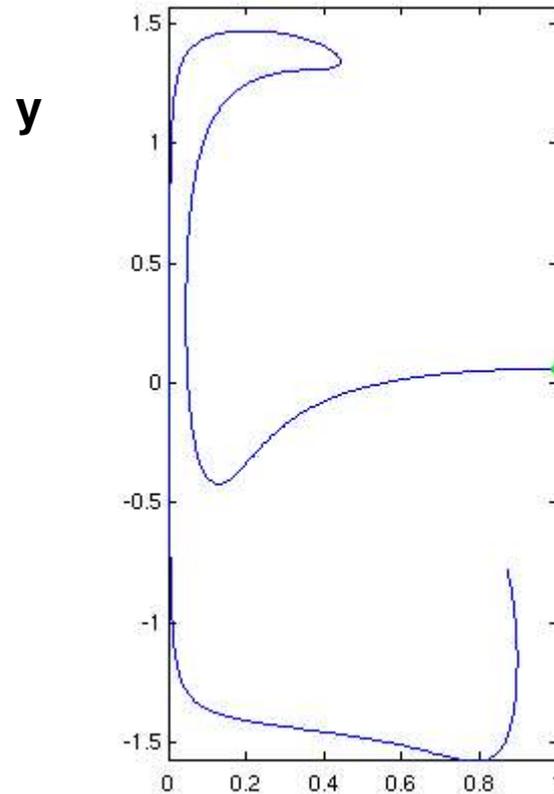
Caso estacionario

Variedades estables e inestables

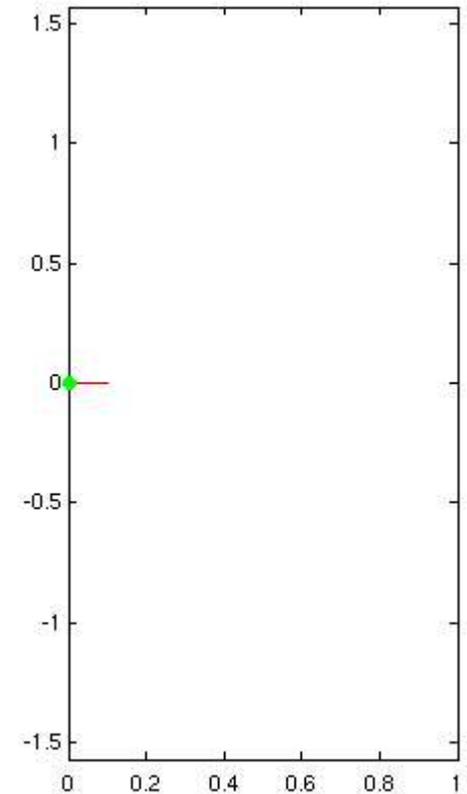


Caso periódico

Variedad estable



Variedad inestable



¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

Las variedades estables e inestables en el caso no estacionario:

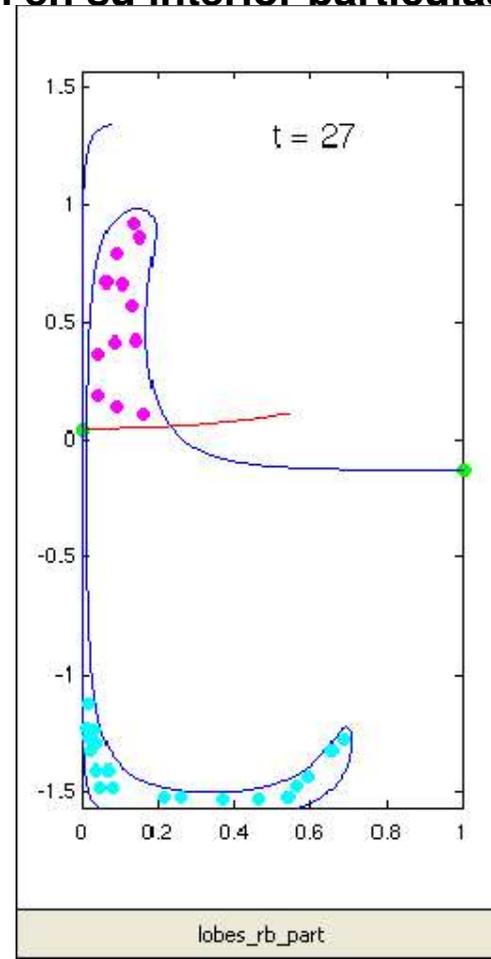
- son barreras al transporte, pues las partículas no las cruzan
- cambian en el tiempo,
- Forman 'lóbulos' que al evolucionar transportan en su interior partículas

La evolución de los lóbulos indica que partículas de arriba pasan abajo y al revés

La evolución de los lóbulos indica que partículas cruzan el chorro

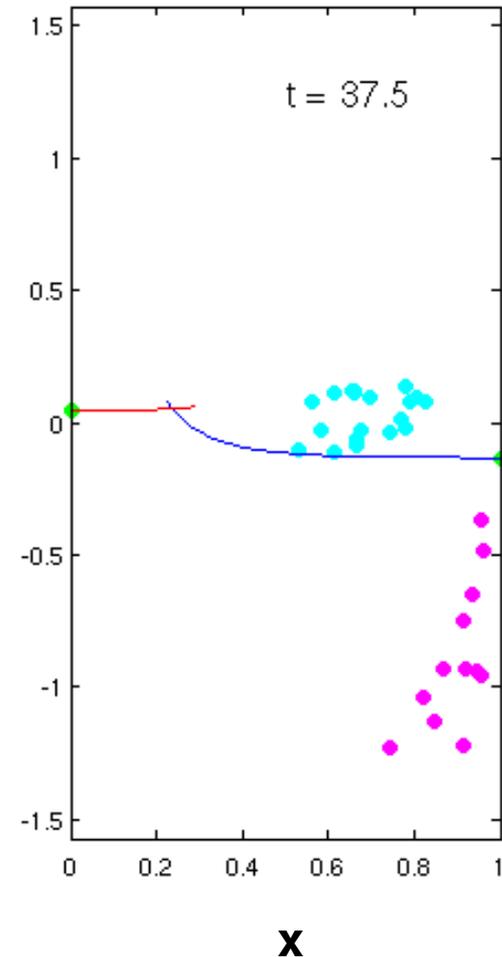
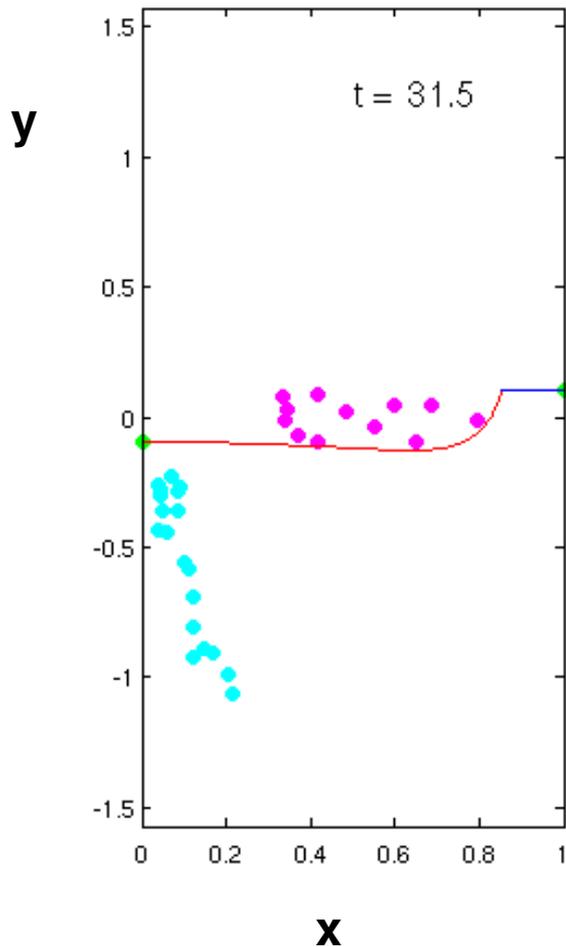
Las partículas pueden cruzar un chorro forzado, pero no un chorro no forzado

y



¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

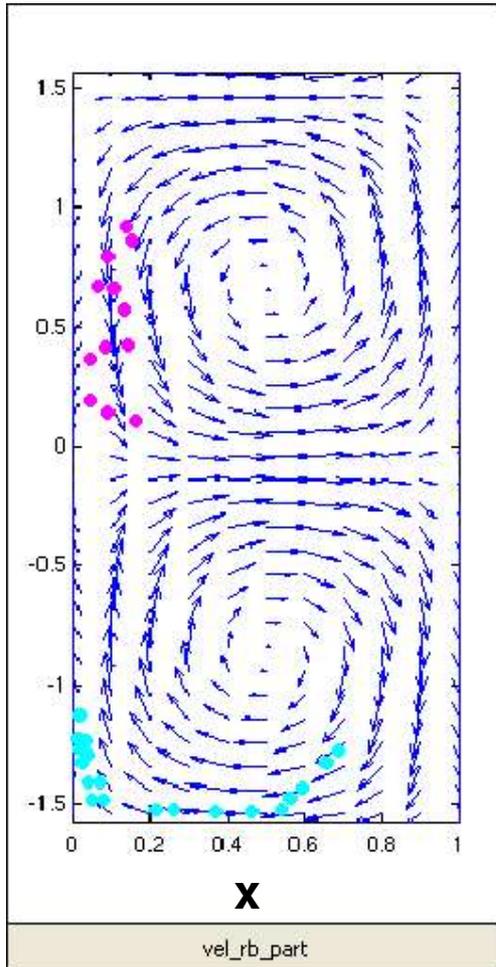
El mecanismo de cruce de partículas de arriba a abajo o al revés se llama mecanismo “turnstile” y ocurre en dos tiempos como mostramos



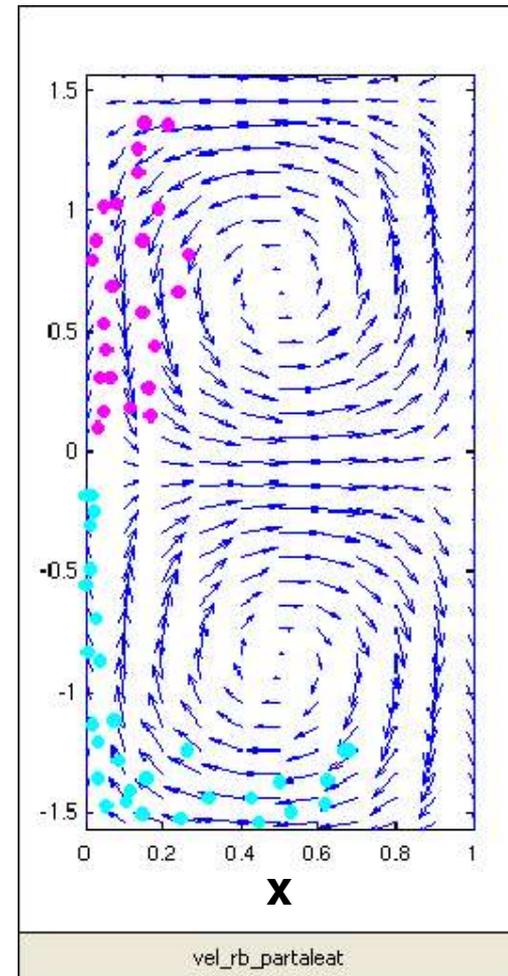
¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

Si no hubieramos tenido la guía de las variedades estables e inestables hubiera sido difícil localizar las partículas que cruzan el chorro central

y

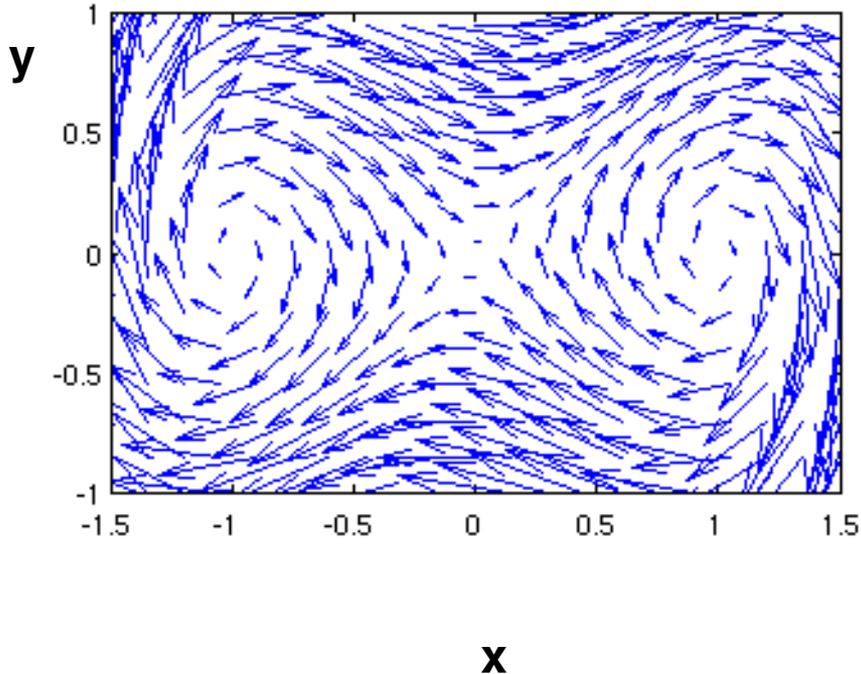


y

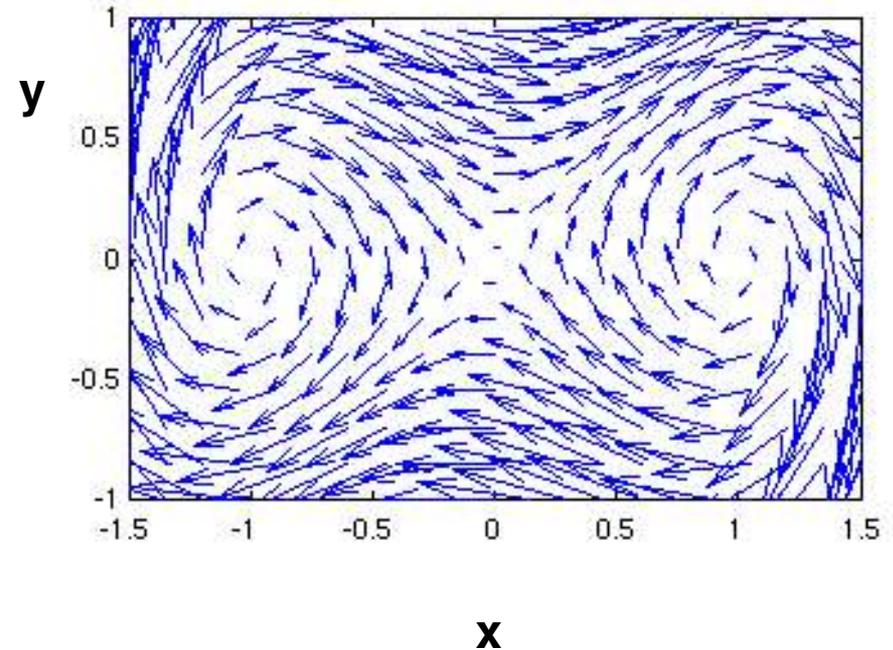


¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

Campo estacionario
Ecuación de Duffing



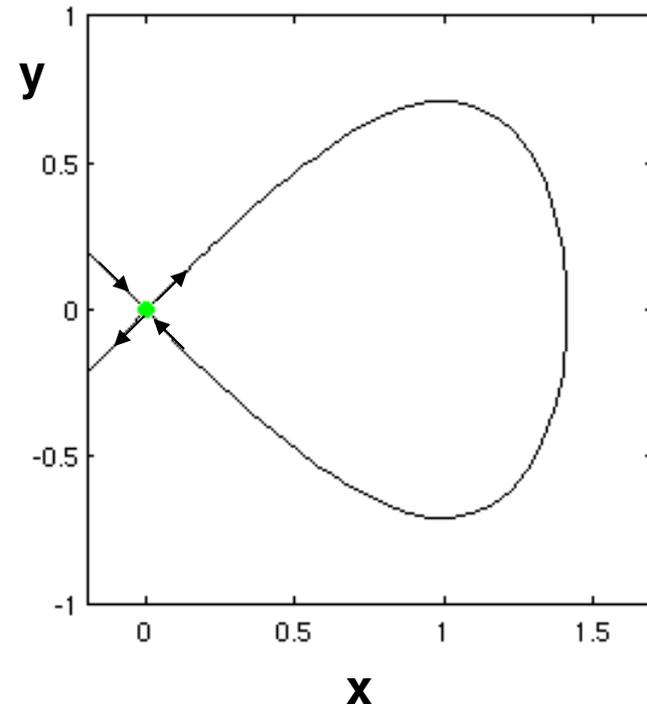
Campo no estacionario
Ecuación de Duffing dependiente del tiempo periódicamente



¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

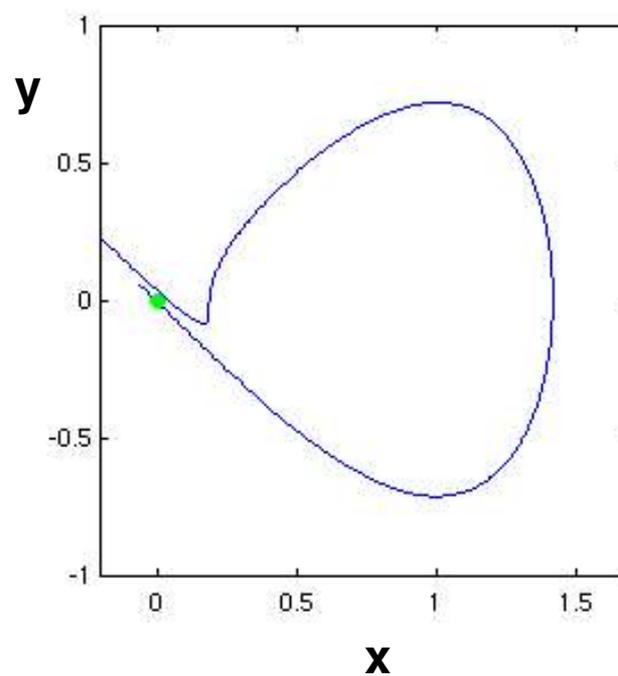
Caso estacionario

Variedades estables e inestables

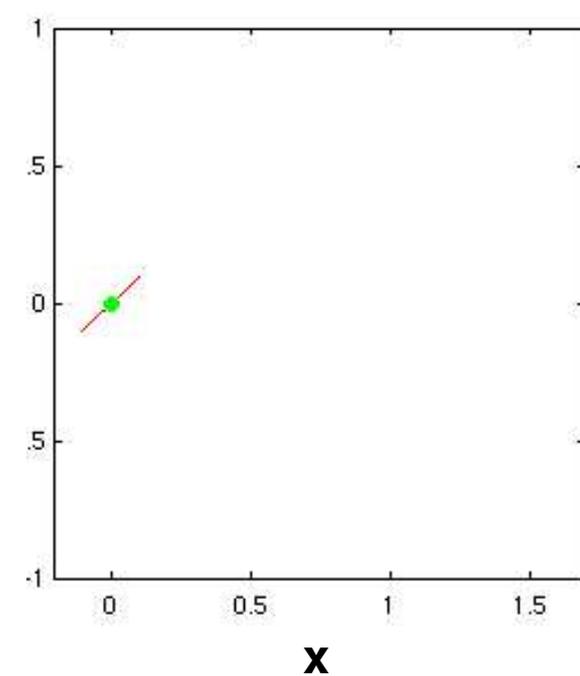


Caso periódico

Variedad estable



Variedad inestable



¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

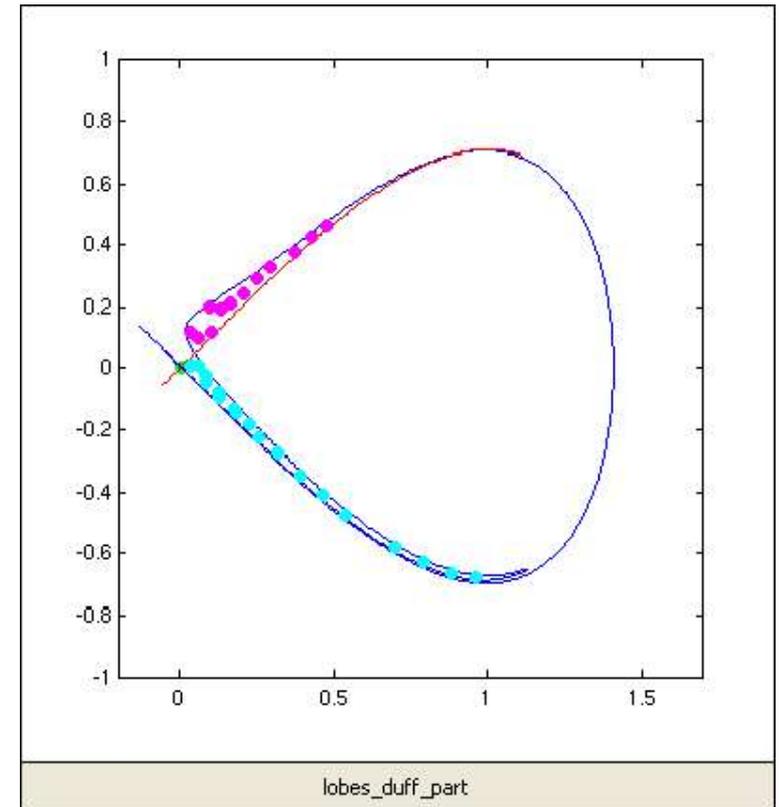
Las variedades estables e inestables en el caso no estacionario:

- son barreras al transporte, pues las partículas no las cruzan
- cambian en el tiempo,
- Forman 'lobulos' que al evolucionar transportan en su interior partículas

La evolución de los lóbulos indica qué partículas del interior del remolino salen de él y cuáles entran.

Las partículas pueden cruzar un remolino forzado, pero no un remolino no forzado

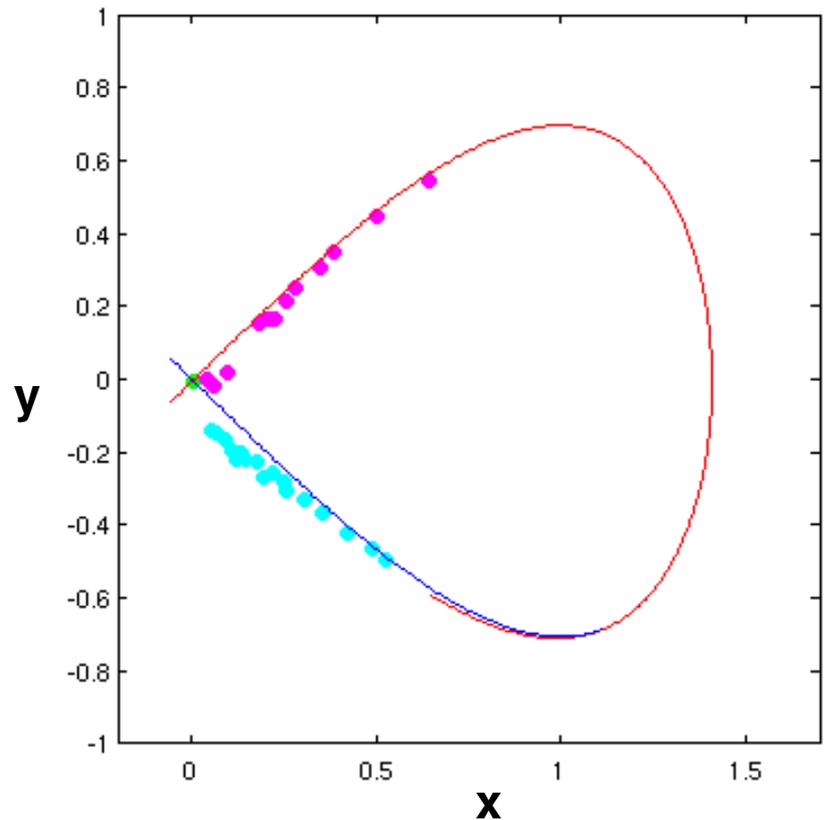
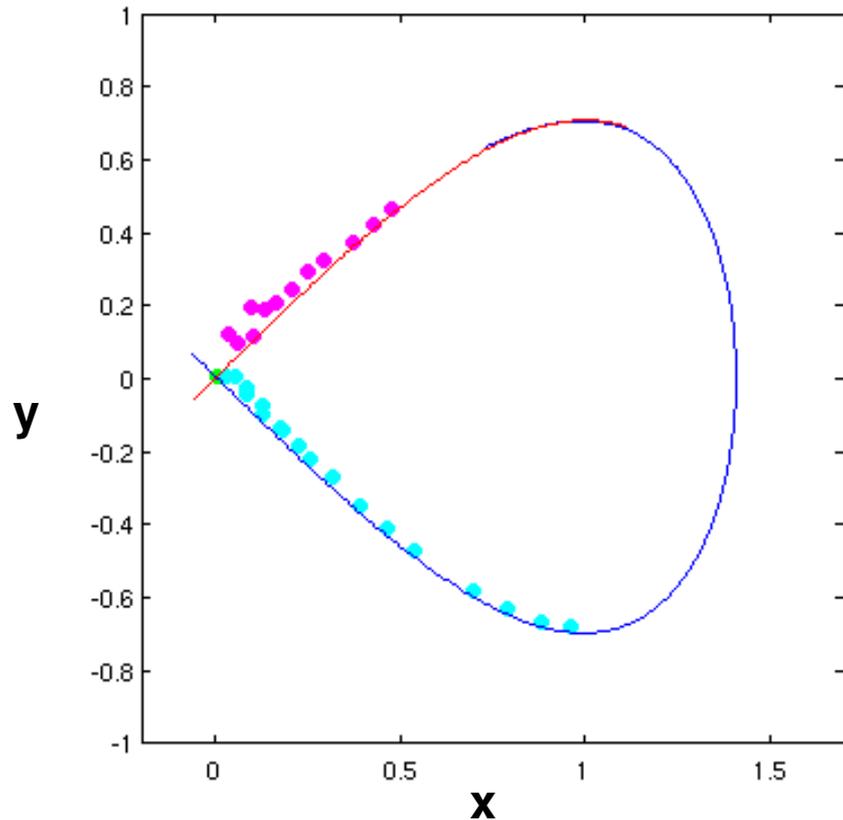
y



x

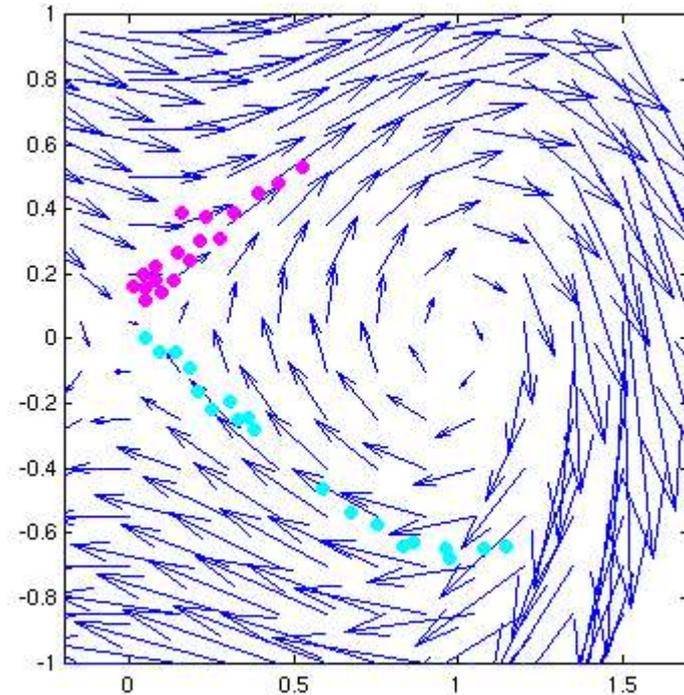
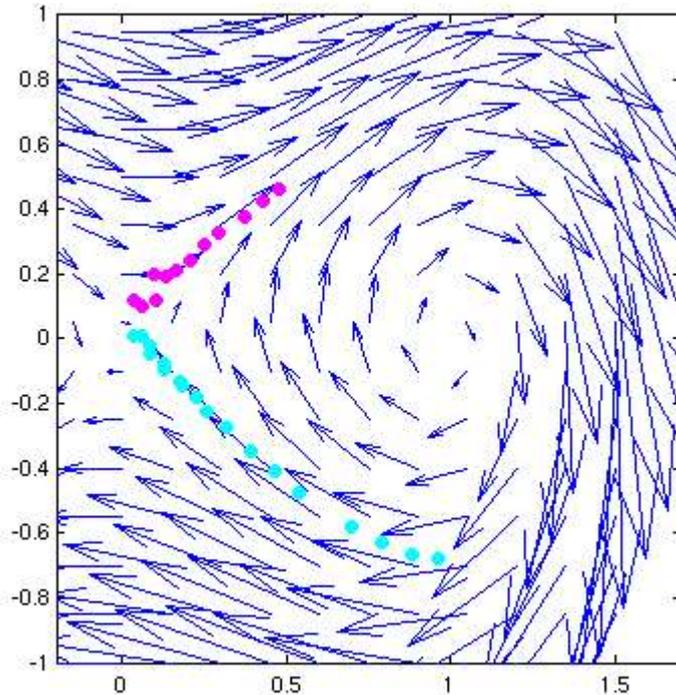
¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

El mecanismo de cruce de partículas de dentro del remolino hacia fuera y al revés se llama mecanismo “turnstile” y ocurre en dos tiempos como mostramos

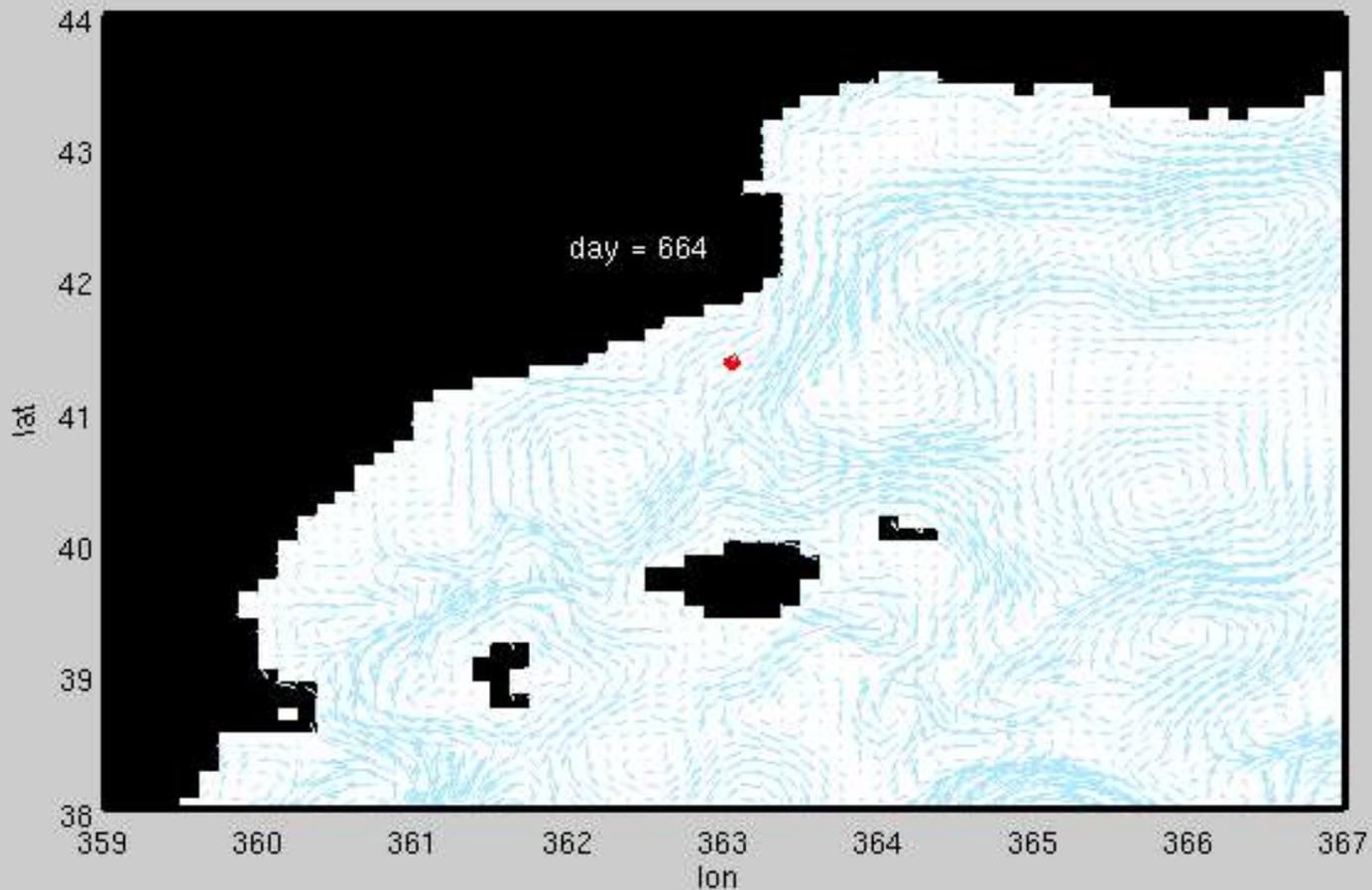


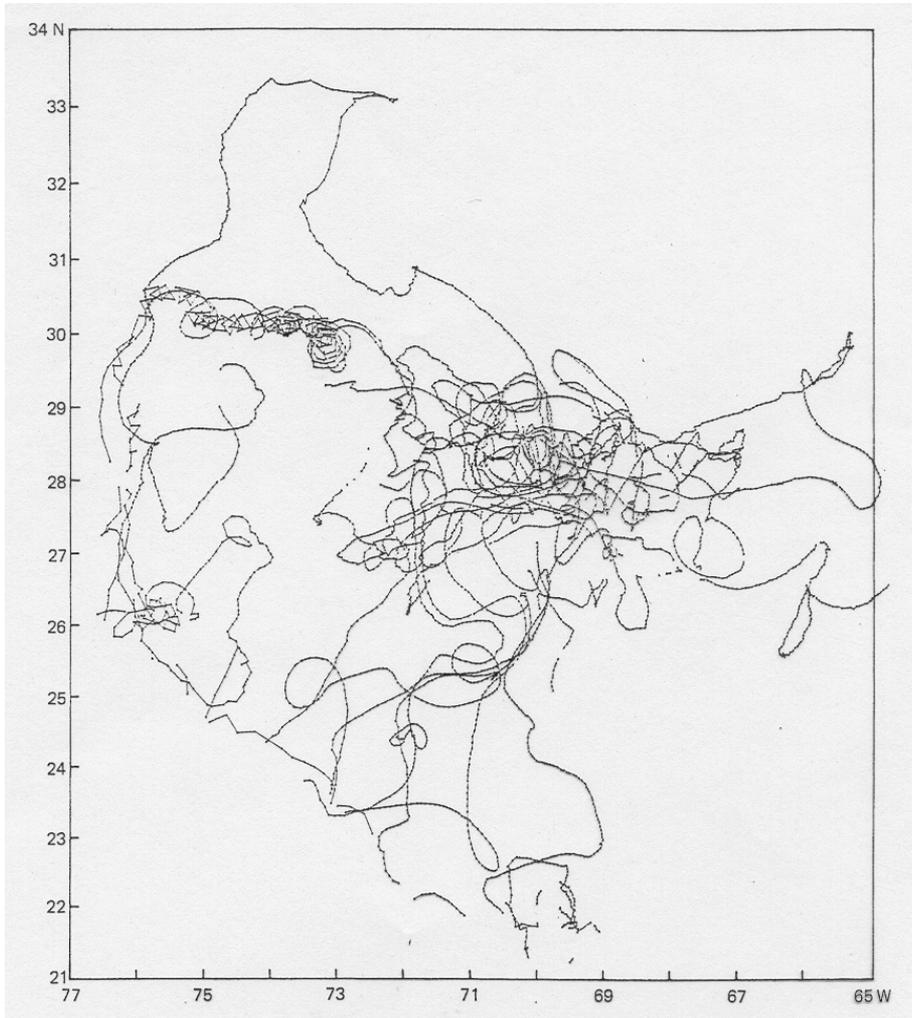
¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario?

Si no hubieramos tenido la guía de las variedades estables e inestables hubiera sido difícil localizar las partículas que cruzan el remolino



¿Cómo se mueve una partícula en un campo de velocidades no estacionario y aperiódico como el océano? (sin difusión)





Diagramas de Spaghetti

48 boyas SOFAR, lanzadas en la posición 28 N y 69 E a 1500 m de profundidad en Noviembre de 1972 y a las que se siguió la pista hasta Diciembre de 1974 (Rossby et al 1975)

¿Cómo se mueven muchas partículas en un campo de velocidades no estacionario y aperiódico como el océano?

Referencias

Mancho, Small, Wiggins, *Physics Reports*. 437 (3-4) 2006 pp 55-124.

Mancho, Small, Wiggins, *Nonlinear Processes in Geophysics* 11 (1) 2004 17-33.

Mancho, Small, Wiggins, Ide, *Physica D* 182 (3-4) (2003) 188-222.

Wiggins, *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005) 295-328.

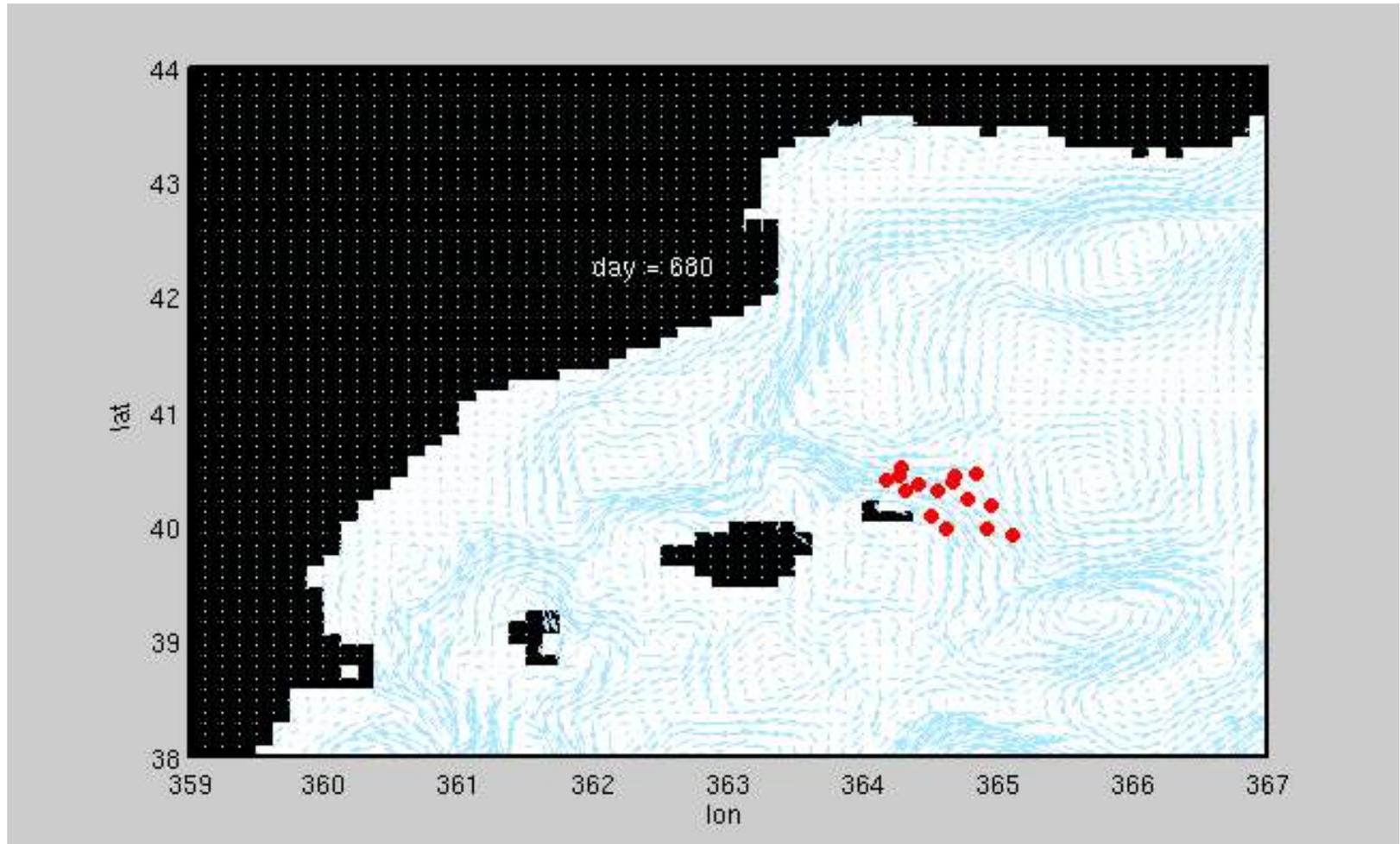
Mancho, Hernández García, Small, Wiggins, Fernández, *Journal of Physical oceanography* (2008) en prensa.

Colaboradores: S. Wiggins, University of Bristol; E. Hernández-García, IFISC, CSIC, Mallorca, Spain; V. Fernández, INGV, Bologna, Italy; D. Small, JIVE, The Netherlands.

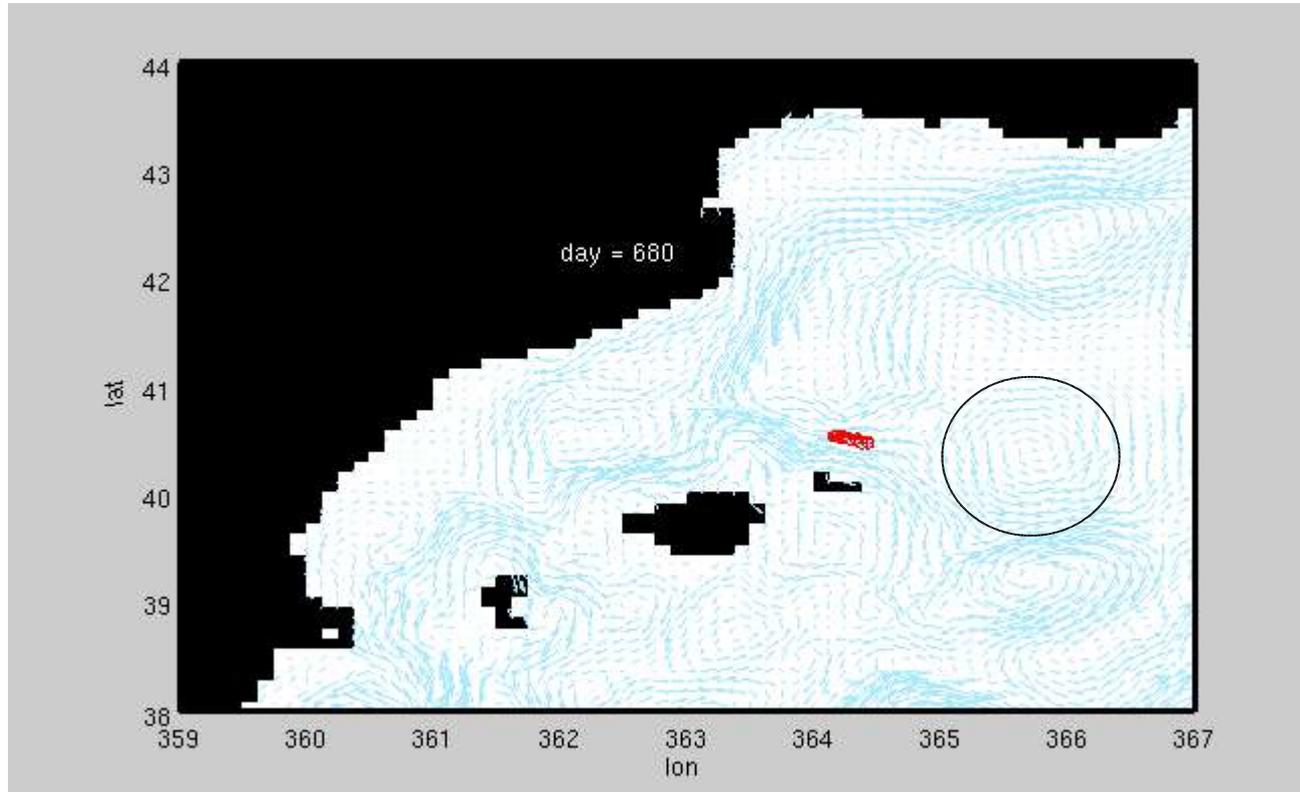
El modelo oceánico

- **Utilizamos un campo de velocidades obtenido de un modelo oceánico, DieCAST, que se adapta al Mar Mediterráneo.**
- **En este modelo se consideran forzados ambientales. El año tiene 12 meses de 30 días cada uno (en total 360 días). Resuelve el campo de velocidades, temperatura y salinidad.**
- **La resolución en latitud longitud es 1/8 de grado.**
- **El modelo considera toda la cuenca Mediterránea en extensión y profundidad. En particular la estructura vertical se resuelve en capas horizontales. En las imágenes mostramos sólo la segunda capa del modelo, muy en la superficie.**
- **Se puede considerar que el campo de velocidades es 2D, pues la componente de velocidad es muy pequeña.**

¿Cómo se dispersan la partículas?

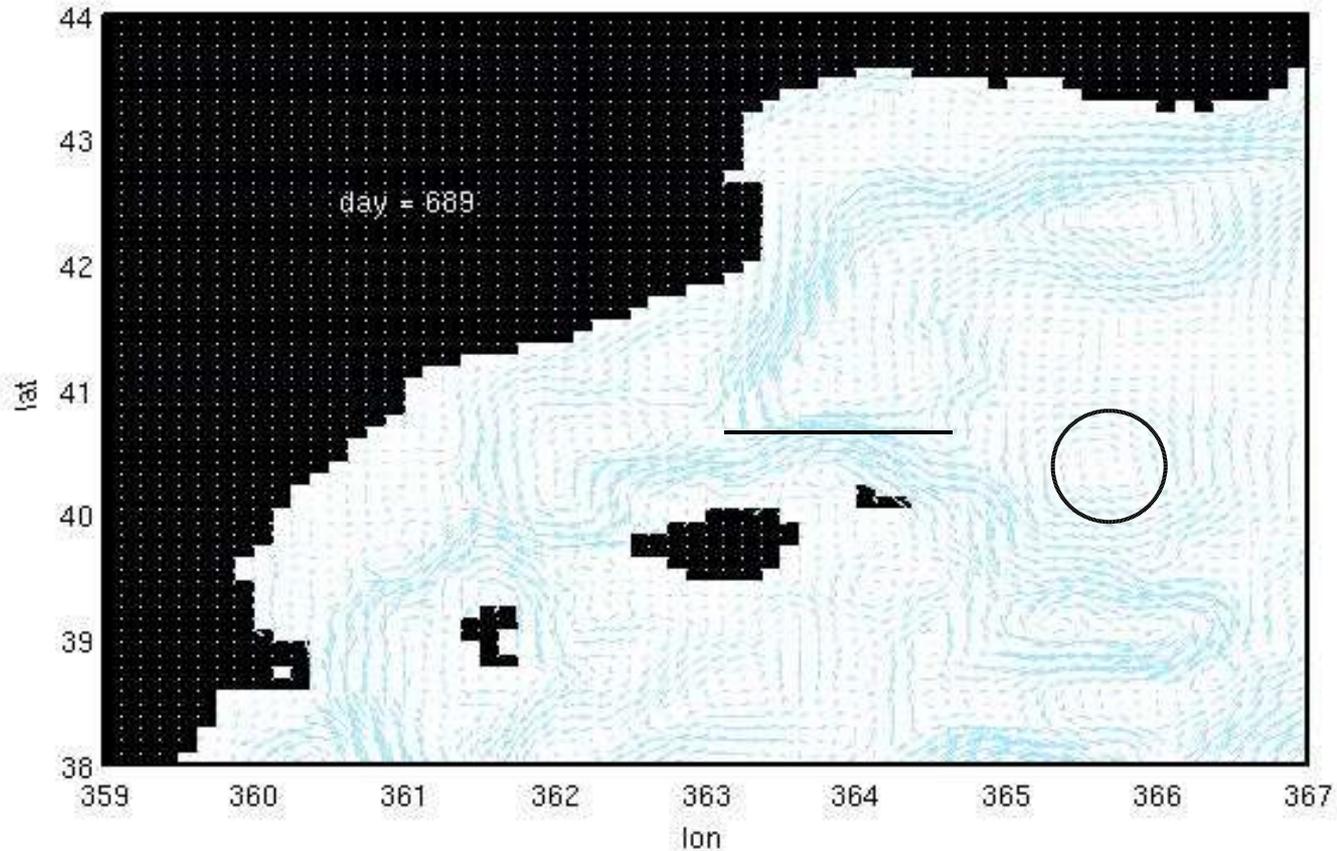


¿Es posible localizar partículas en un instante de tiempo que finalmente terminen dentro de este remolino?



No ha sido cuestión de suerte. Gracias a las variedades estables e inestables de las trayectorias hiperbólicas hemos podido emplazar las condiciones iniciales que eventualmente han terminado en el remolino

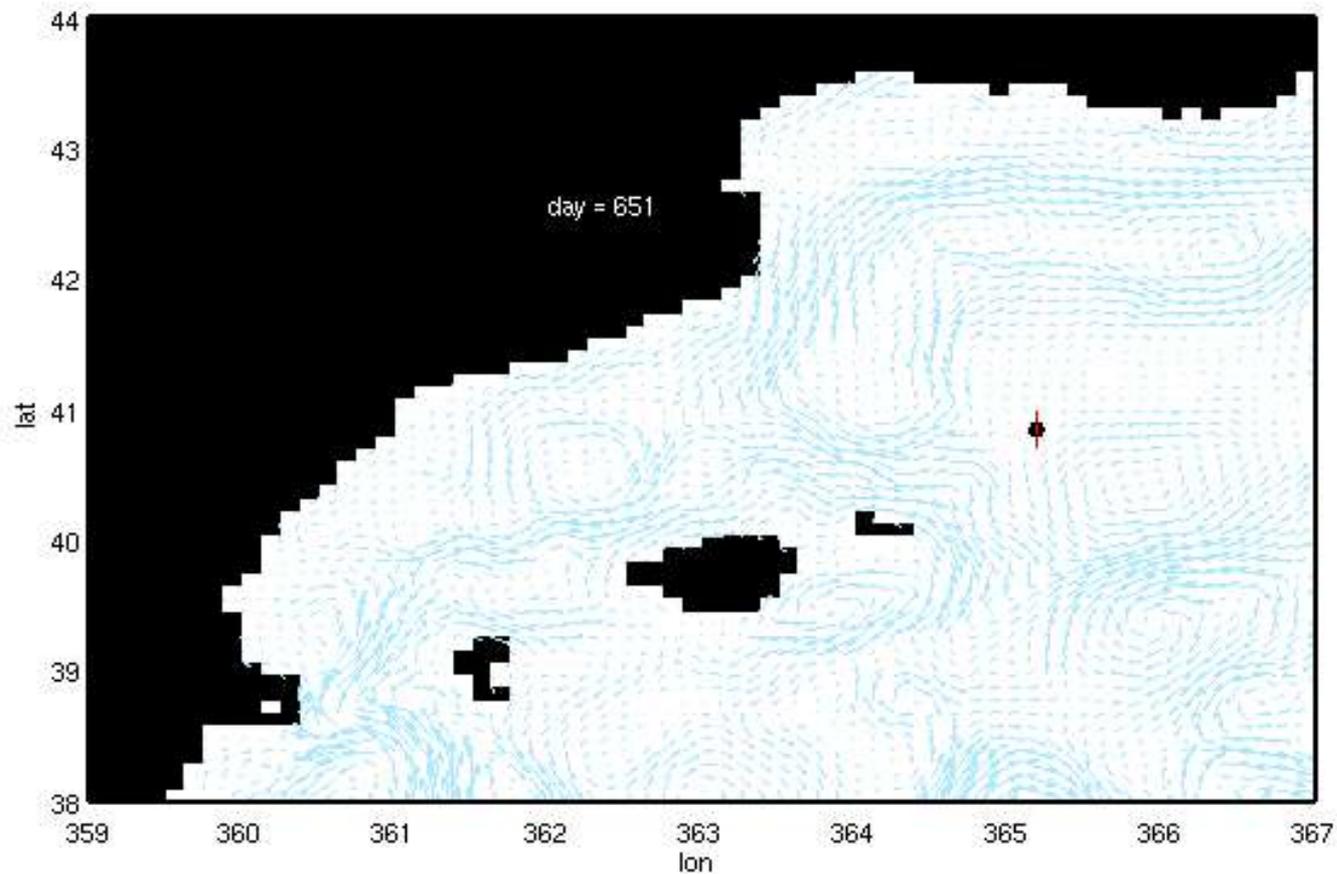
Las *variedades* y '*lóbulos*' nos ayudan a contestar la pregunta ¿cruzan las partículas estas barreras?



Son objetos geométricos que determinan las rutas para pasar a través de una barrera como una corriente marina o un remolino

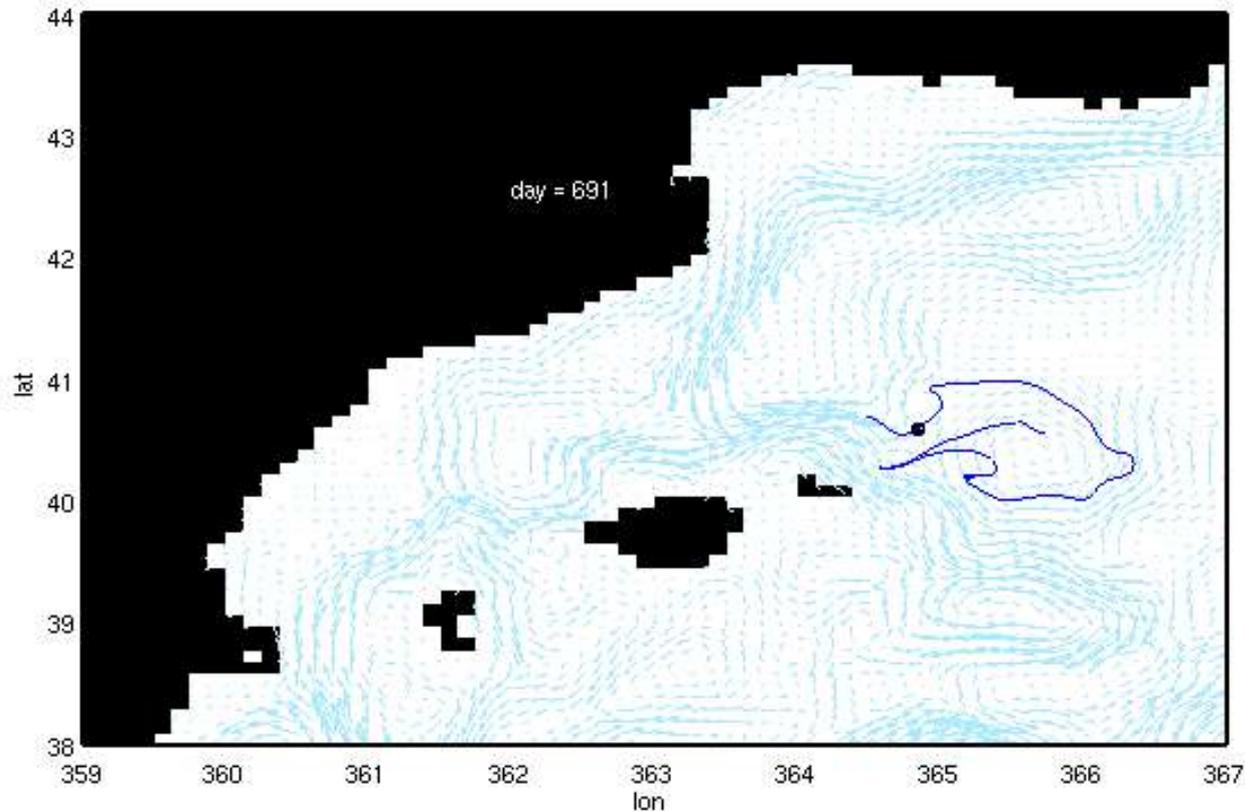
Cruzando el remolino

La *variedad inestable* está hecha de trayectorias que en tiempo menos infinito se acercan a la trayectoria hiperbólica



Cruzando el remolino

La **variedad estable** está hecha de trayectorias que en tiempo más infinito se acercan a la trayectoria hiperbólica

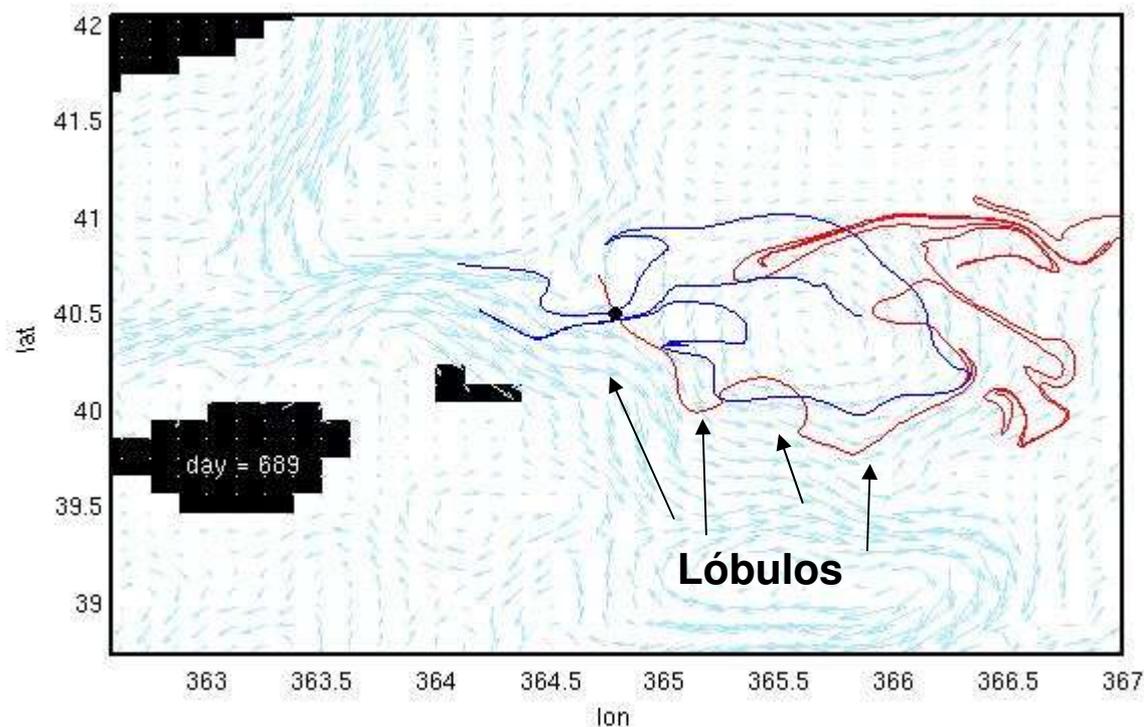


Las variedades son **barreras al transporte** pues están hechas de trayectorias

Cruzando el remolino

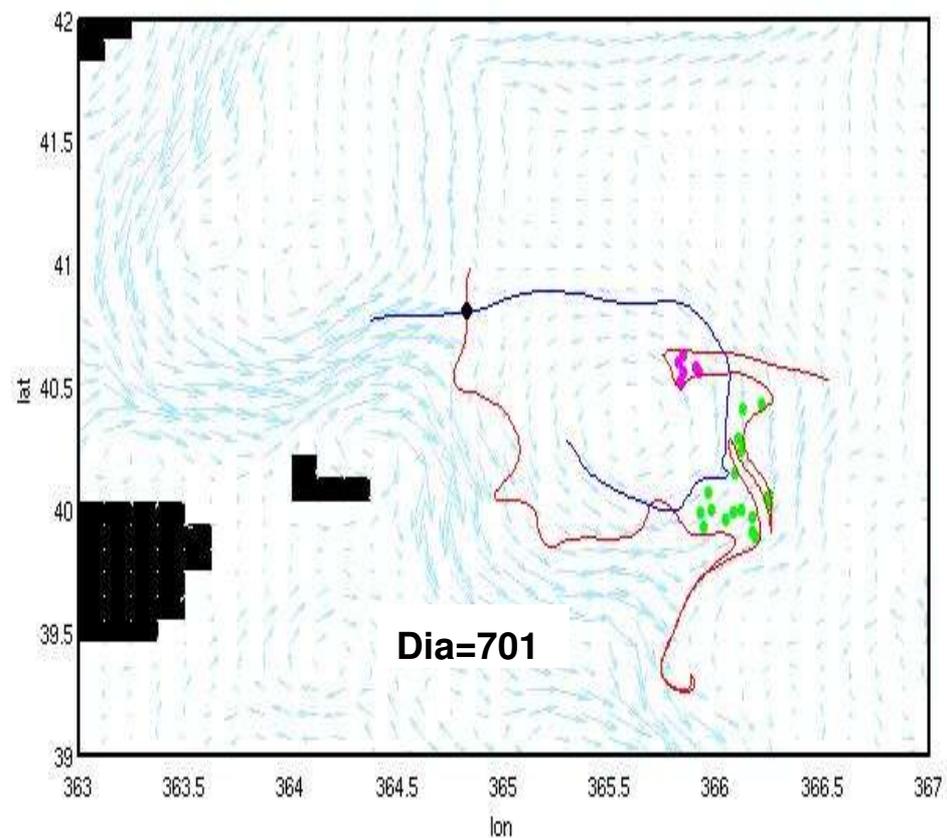
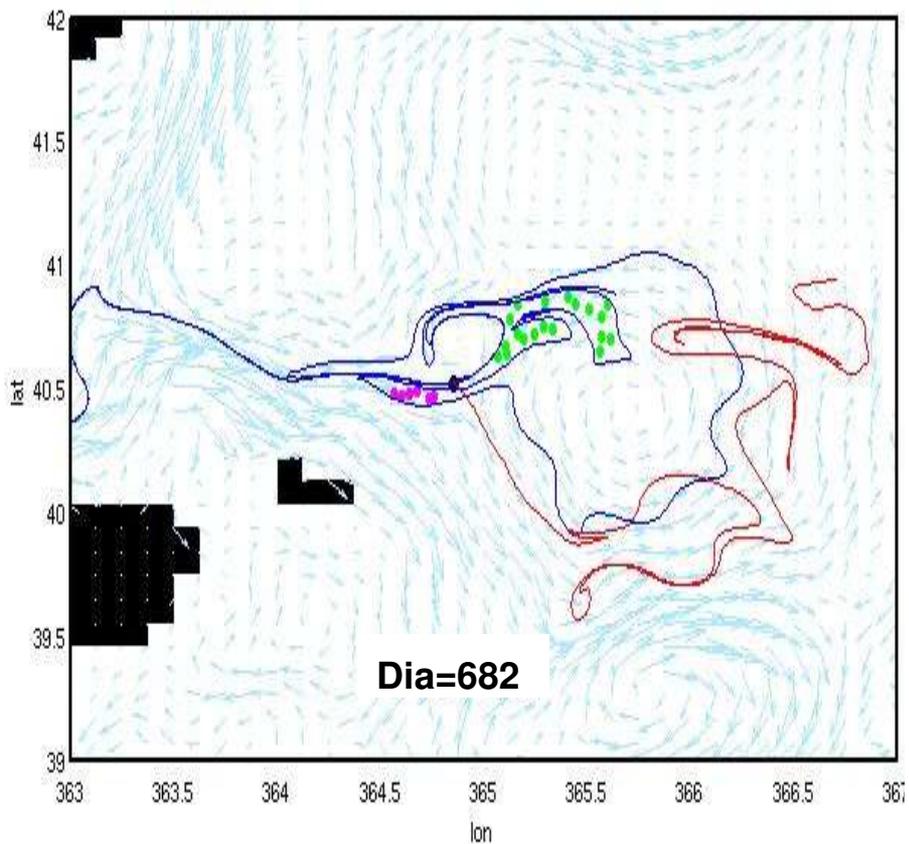
De la intersección de las variedades estables e inestables se forman **lóbulos**

Los lóbulos son fronteras que las masas de partículas de agua no pueden cruzar

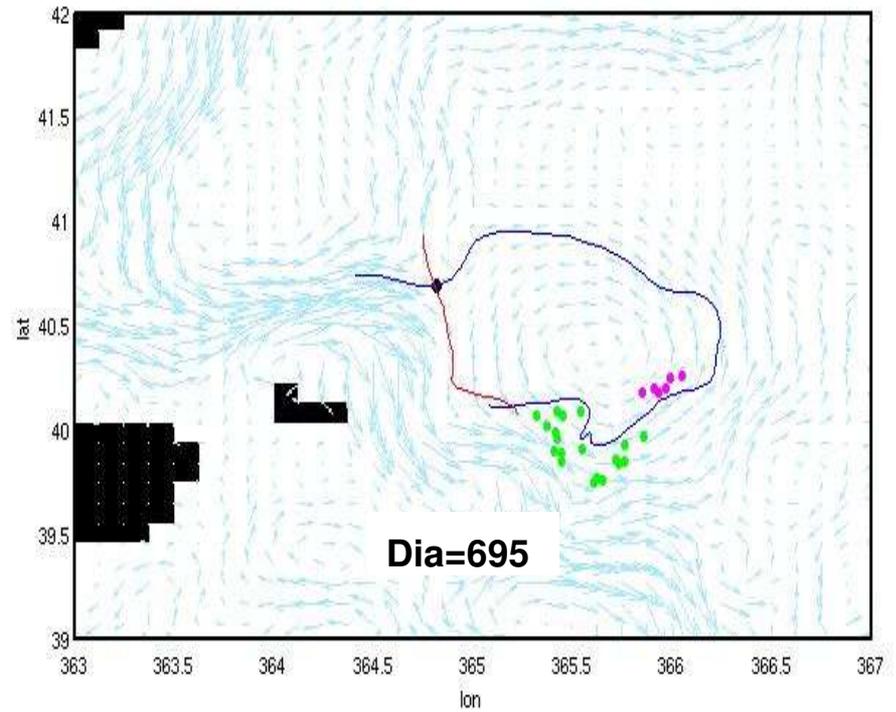
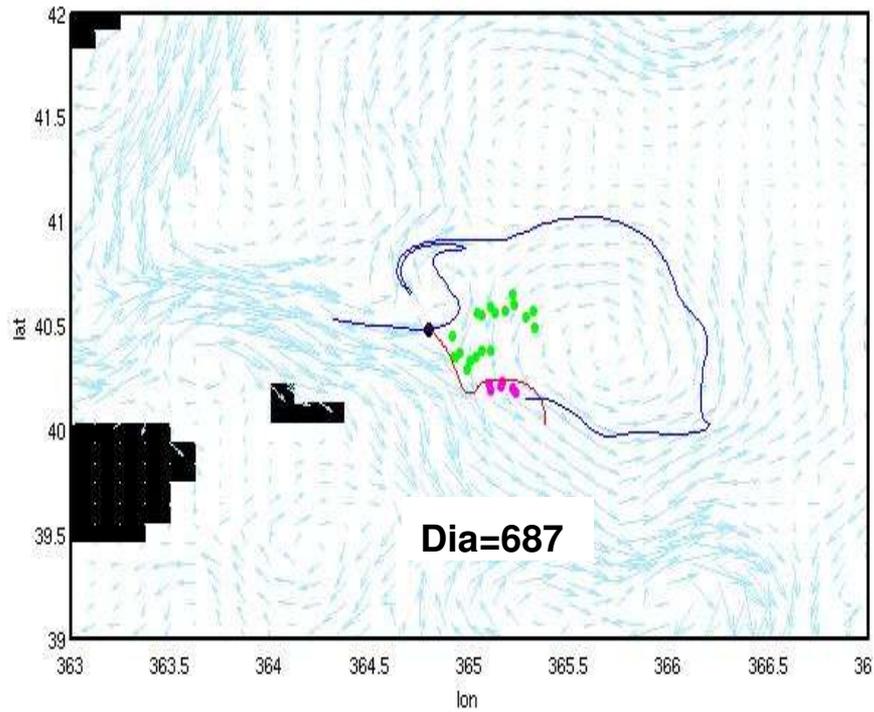


Variedades y **lóbulos** son útiles porque constituyen un **esqueleto geométrico** que sirve para predecir la evolución de conjuntos de condiciones iniciales, es decir de muchas partículas.

Cruzando el remolino

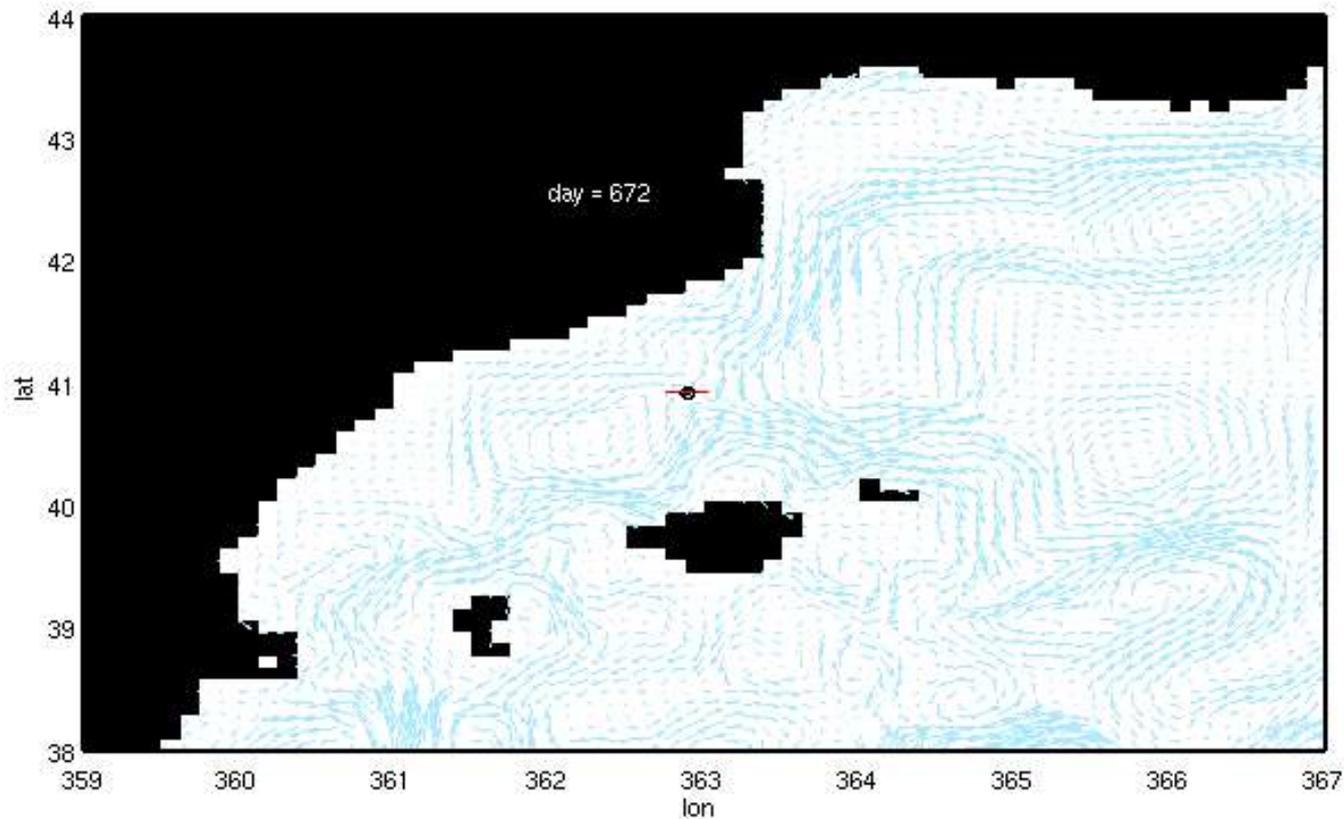


Cruzando el remolino



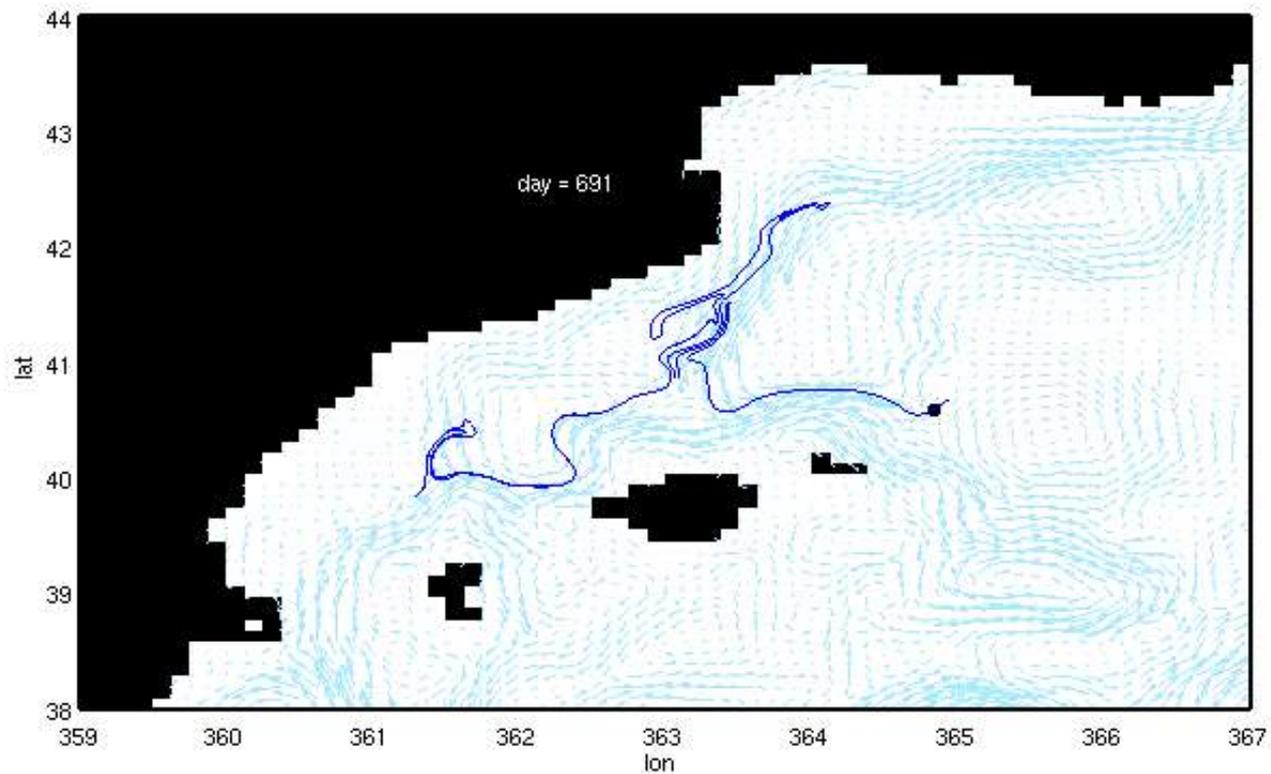
Cruzando una corriente

La **variedad inestable** está hecha de trayectorias que en tiempo menos infinito se acercan a la trayectoria hiperbólica



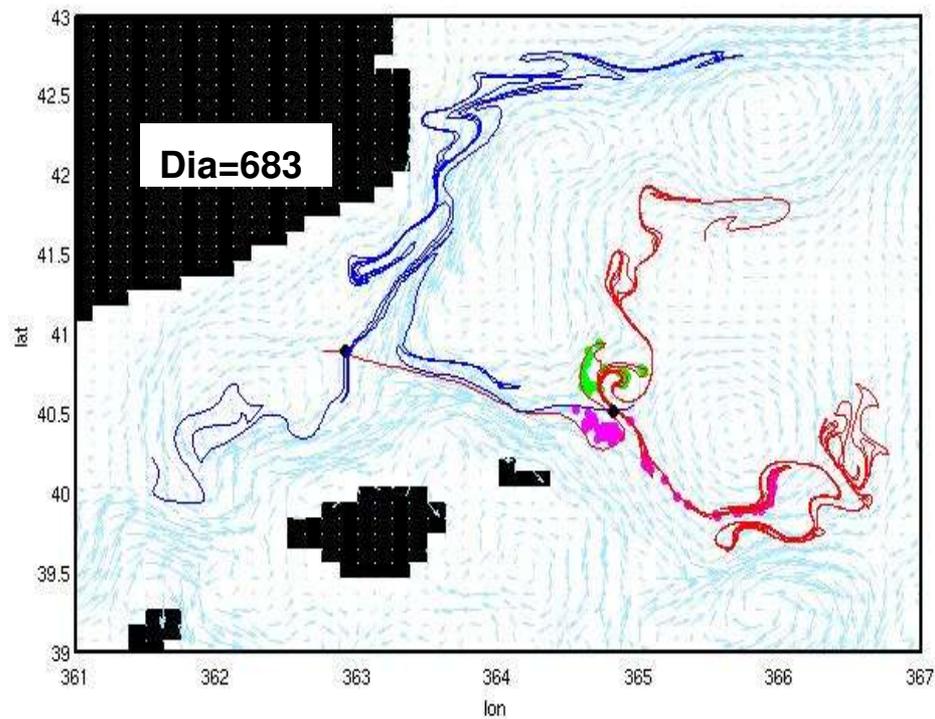
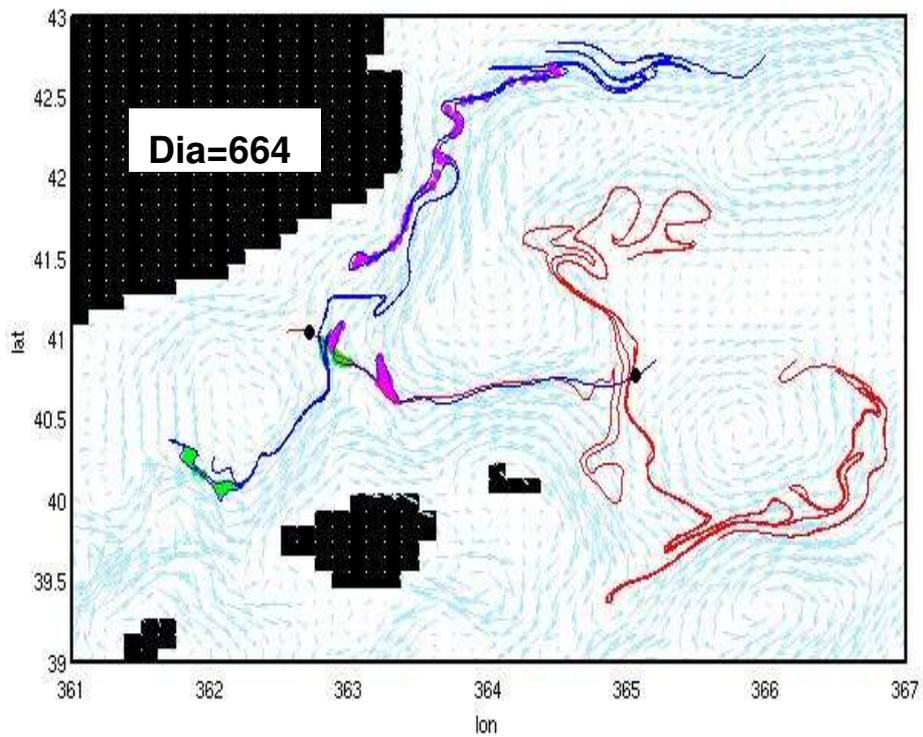
Cruzando una corriente

La **variedad estable** está hecha de trayectorias que en tiempo más infinito se acercan a la trayectoria hiperbólica

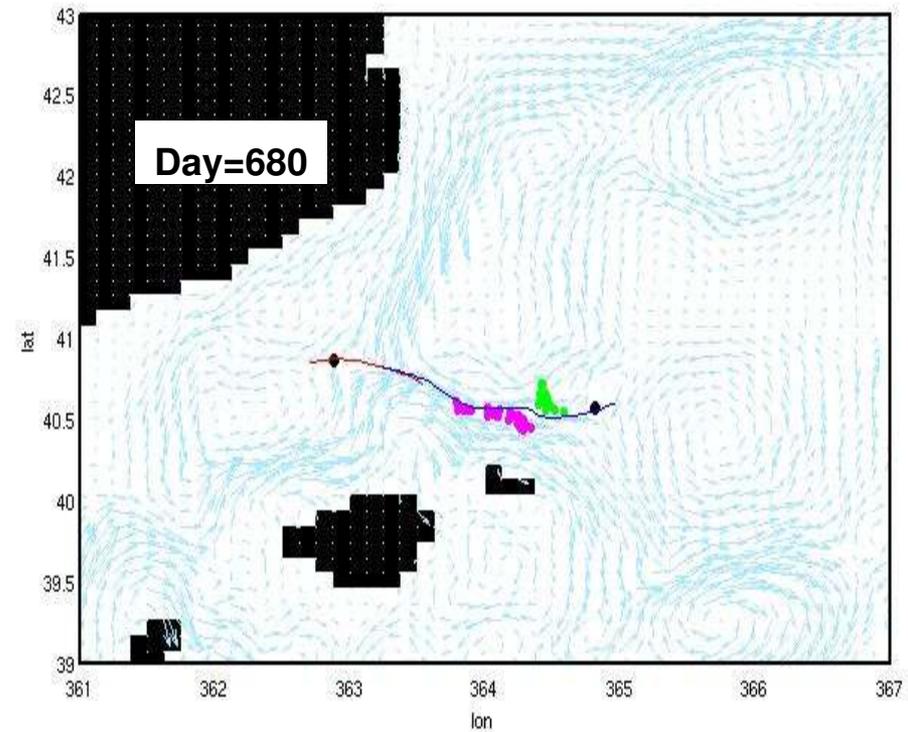
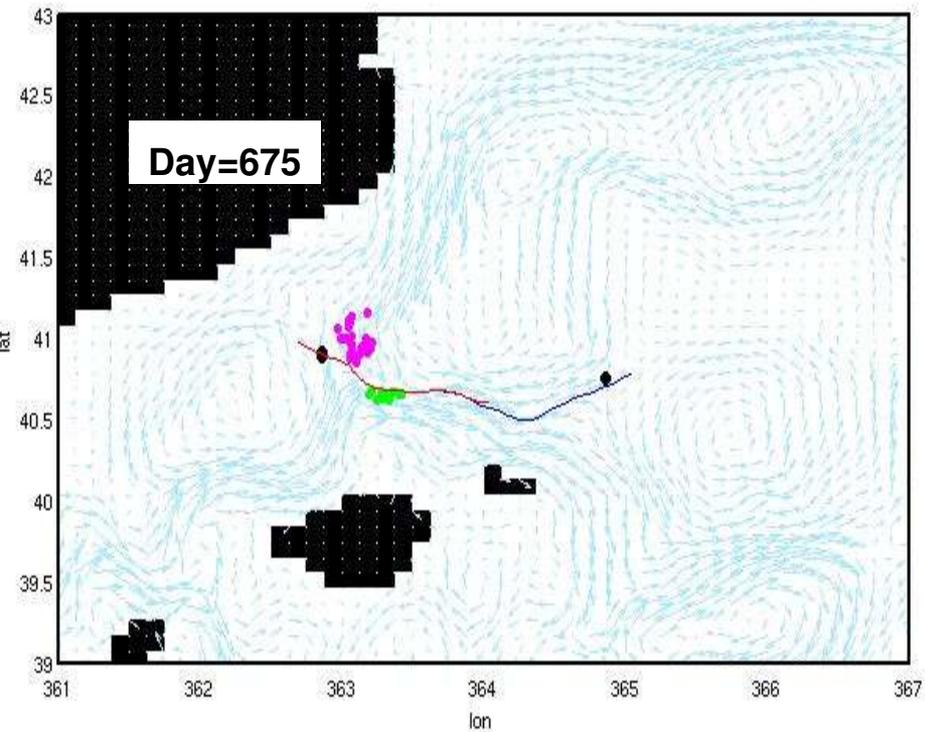


Las variedades son **barreras al transporte** pues están hechas de trayectorias

Cruzando una corriente

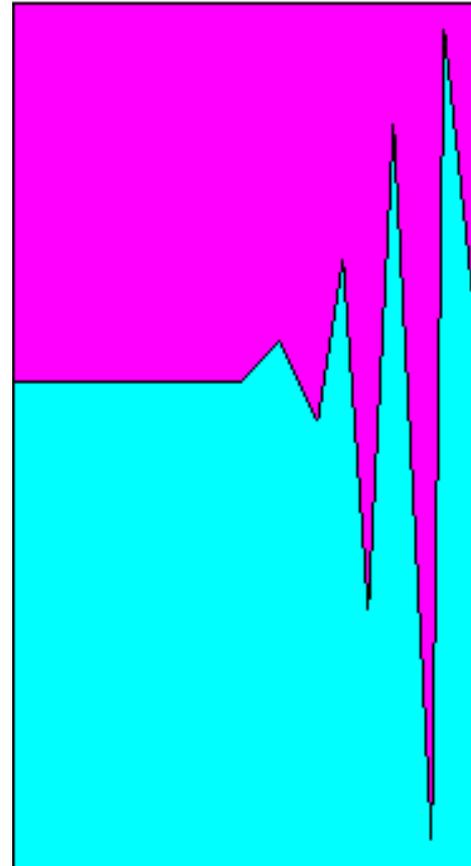
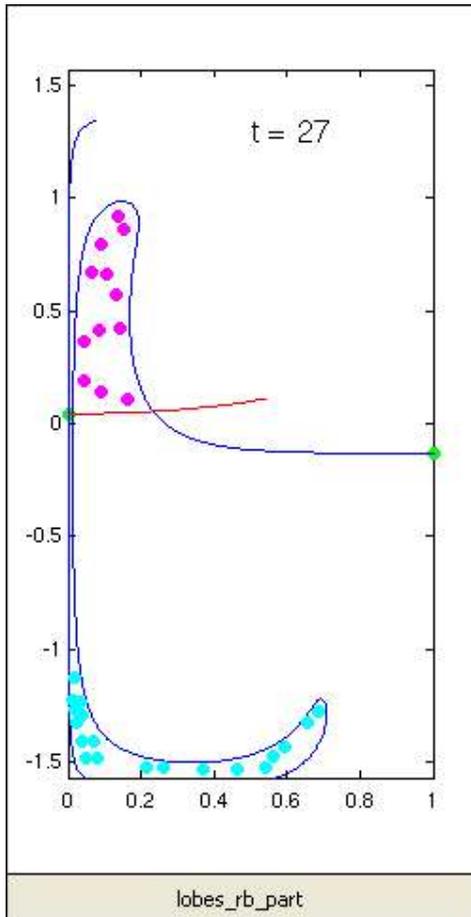


Cruzando una corriente

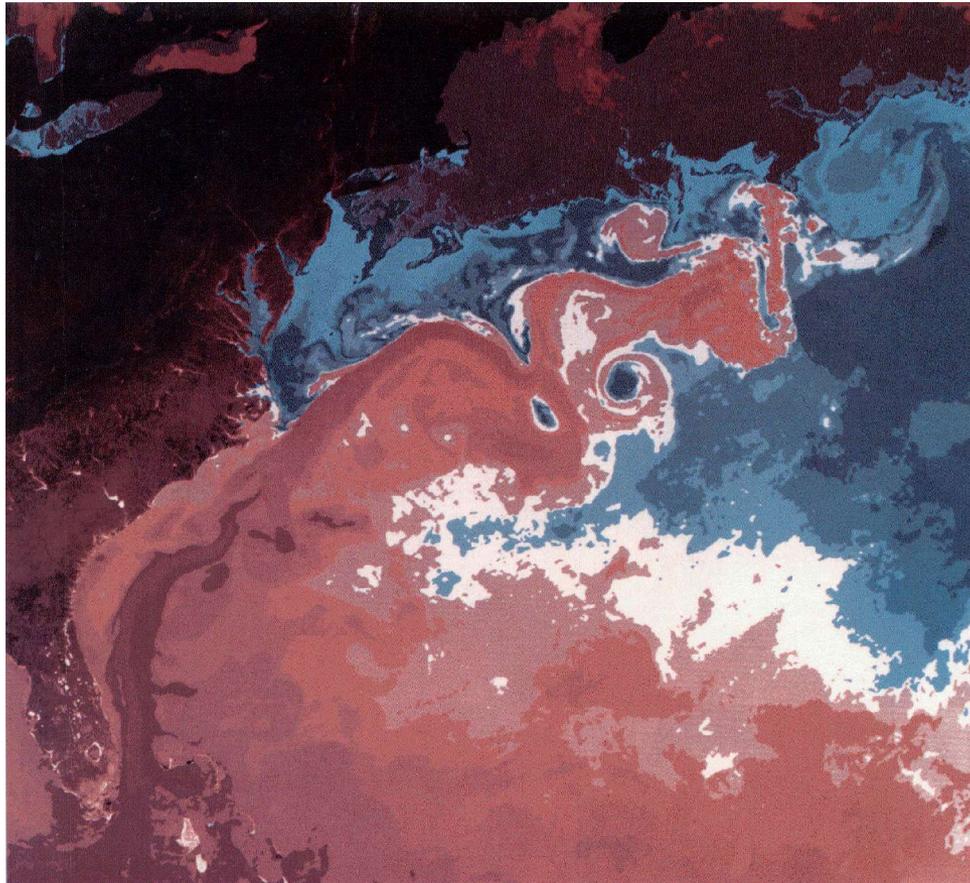


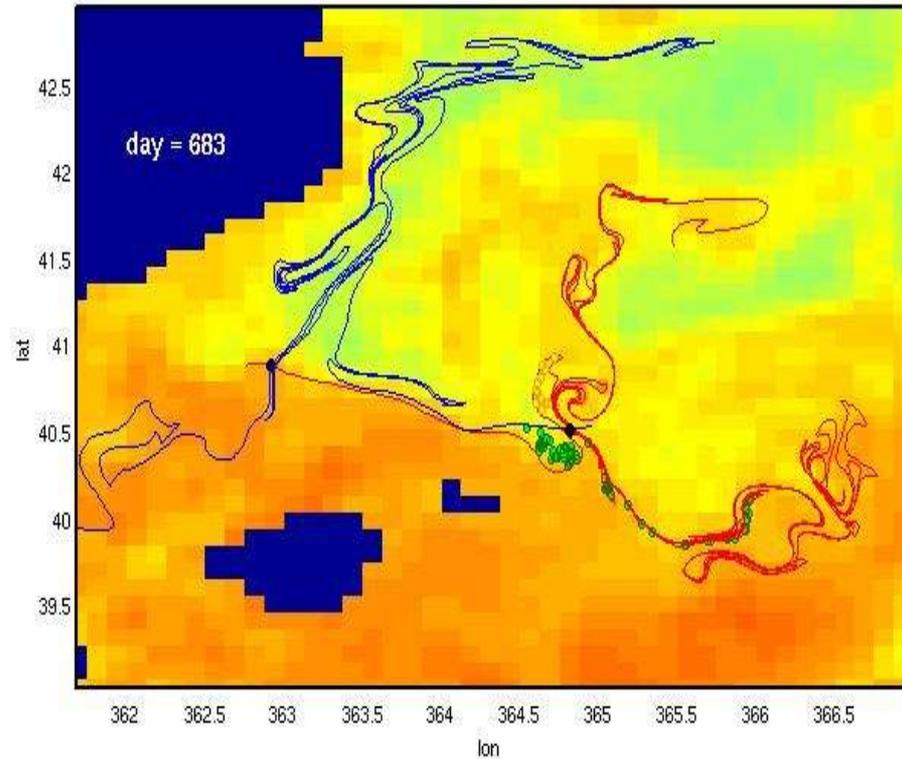
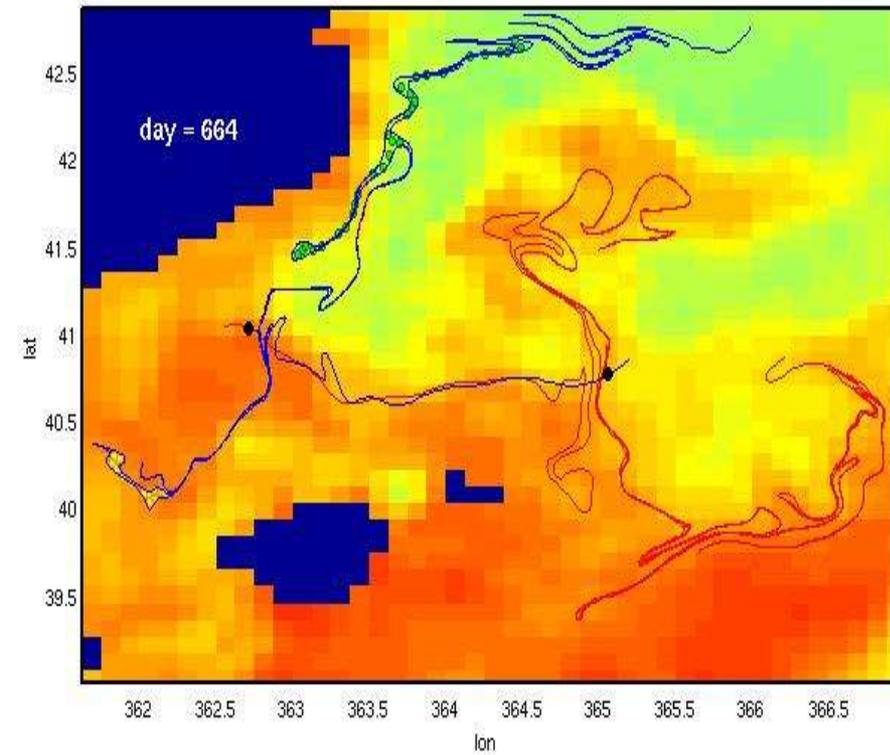
¿Qué pasaría si todas las partículas del norte de la barrera fueran rosas, y todas las de abajo fueran azules?

Los lóbulos mezclan el norte con el sur generando una estructura filamentosa como la aquí esquematizada



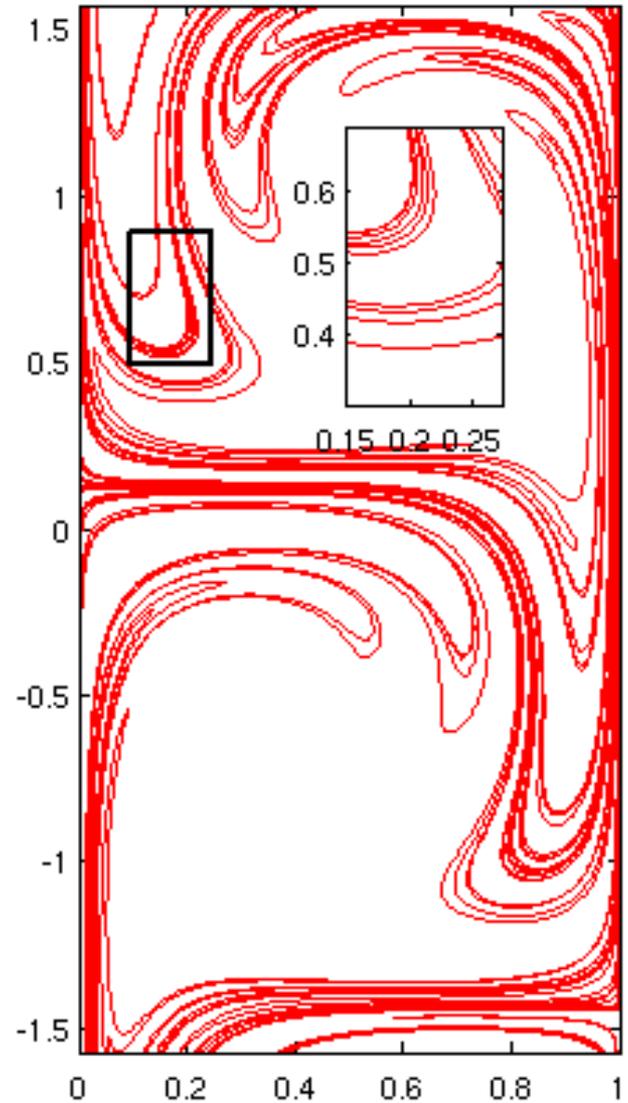
Si las partículas transportan calor, desde un satélite se ven coloreadas de distinto modo según su temperatura. Si todo el norte está frío y todo el sur caliente ¿Trazan las variedades estas imágenes?





1. Las *variedades estables e inestables* de los sistemas con campo de velocidades dependiente del tiempo aunque sea periódico son mucho mas *intrincadas* de lo mostrado y de hecho su longitud es infinita.

Extraer la información mostrada no es trivial



2. Los **puntos de equilibrio hiperbólicos** son trayectorias de referencia cuyas variedades estables e inestables son útiles para conocer las soluciones de los sistemas autónomos. La generalización de la noción de punto de equilibrio a sistemas aperiódicos a través de **trayectorias hiperbólicas distinguidas** no está completa desde el punto de vista matemático.
3. Hemos aplicado ideas provenientes de los sistemas dinámicos al transporte en sistemas reales como el océano en los que los campos de vectores se proporcionan como un **conjunto finito de datos**. Sin embargo en los **sistemas dinámicos** los conceptos están construidos para campos de velocidades en **tiempo infinito** por lo que su aplicabilidad a veces es difícil.
4. La descripción de mezclado que se ha ofrecido es para **advección pasiva sin difusión**.

Para saber más

Mancho, Small, Wiggins, *Physics Reports*. 437 (3-4) 2006 pp 55-124.

Mancho, Small, Wiggins, *Nonlinear Processes in Geophysics* 11 (1) 2004 17-33.

Mancho, Small, Wiggins, Ide, *Physica D* 182 (3-4) (2003) 188-222.

Ide, Small, Wiggins, *Nonlinear Processes in Geophysics* (9) (2002) 237-263.

Wiggins, *Annual Review of Fluid Mechanics* 37 (2005) 295-328.

<http://ifisc.uib.es/oceantech>

Mancho, Hernández García, Small, Wiggins, Fernández, *Journal of Physical oceanography* (2008) en prensa.

Wiggins “Chaotic transport in Dynamical systems”. Springer

Samelson, Wiggins “Lagrangian Transport in Geophysical Jets and Waves: The Dynamical Systems Approach”. Springer