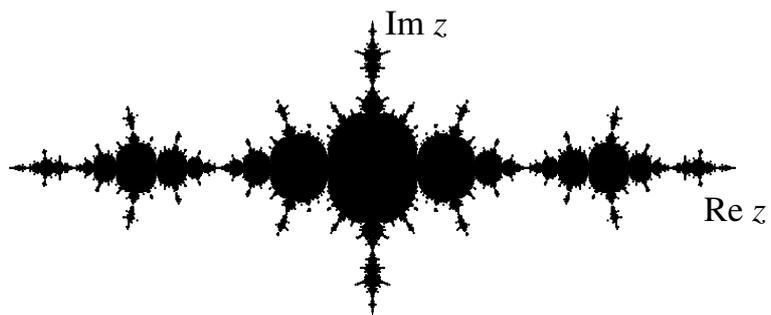

Métodos de Variable Compleja

David Sánchez



©2015 David Sánchez (email: david.sanchez@uib.es). Se autoriza a copiar, imprimir o distribuir este documento o partes de él, libremente, siempre que se cite el nombre del autor y aparezca esta nota de copyright. Prohibido el uso con fines comerciales.

A mis hijos

Presentación

El objetivo de esta obra es presentar los principios básicos y las aplicaciones del análisis complejo a estudiantes que carezcan del conocimiento previo en la materia. El espíritu de la obra se enmarca dentro de un enfoque práctico de las matemáticas. No se hace tanto énfasis en la teoría general y en las abstracciones que ésta inevitablemente conlleva, sino que se prefiere desarrollar un conjunto de métodos útiles para resolver problemas científicos. De ahí que el público al que va dirigido este libro esté formado principalmente por alumnos de los grados de física e ingeniería, si bien puede asimismo resultar de interés como texto complementario al lector con una vocación más matemática.

La presente obra es consecuencia de la impartición, durante varios años, del curso *Variable Compleja*, asignatura que con esta u otra denominación está presente en todos los planes de estudios de Física, Ingeniería o Matemáticas. El libro pretende dar respuesta a una pregunta que de forma recurrente se plantean los estudiantes de primer y segundo curso: ¿para qué sirven los números complejos? La supuesta desconexión del análisis complejo del mundo real es radicalmente falsa, como aquí se demuestra mediante abundantes ejemplos y aplicaciones prácticas. Después de un tratamiento elemental de los números complejos en el capítulo 1, que puede seguirse con mayor o menor rapidez dependiendo del bagaje del lector, se comienza en el capítulo 2 el estudio de las funciones de variable compleja. Se le supone al estudiante cierta familiaridad con las funciones reales de varias variables y el cálculo infinitesimal. El capítulo 3 resume las propiedades características de las funciones complejas elementales. En el capítulo 4 se explican las integrales en variable compleja, aunque los principales métodos de resolución se dejan para el capítulo 6, tras un necesario intervalo que describe las series de potencias en el capítulo 5. El capítulo 7 presenta las transformaciones conformes y sus aplicaciones. Finalmente, se ha incluido un apéndice que expone los fundamentos de la transformada de Laplace. El núcleo de un curso semestral estaría articulado alrededor de los temas 1 al 6.

El libro contiene ejemplos a lo largo del texto, al que se ha agregado una pequeña colección de problemas resueltos que se han extraído de exámenes y pruebas escritas, así como una serie de ejercicios propuestos cuya solución aparece en las páginas finales. En todo caso, se ha tratado de que la práctica domine sobre la teoría y de emplear un estilo didáctico y comprensible. Cada capítulo se cierra con la discusión de una aplicación con cierta profundidad. Los temas son variados: astronomía, teoría del caos, ingeniería eléctrica, física teórica o física de fluidos. Pretenden estimular al alumno y excitar su imaginación. Los capítulos se rematan con pinceladas históricas sobre la vida de unos hombres extraordinarios,

incluyendo sus retratos cuando ha sido posible, que contribuyeron a que el análisis complejo sea uno de los grandes logros del pensamiento humano.

Me gustaría agradecer los comentarios valiosos que me han hecho llegar los profesores Luis Bonilla, Gloria Platero y Rosa López, en especial los ánimos de ésta última, sin cuya comprensión y entusiasmo esta obra no hubiera visto la luz.

Palma de Mallorca
Junio de 2015

Índice general

0. Motivación	13
1. Números complejos	17
1.1. Definición	17
1.2. Representación gráfica	18
1.3. Propiedades algebraicas	19
1.4. Propiedades geométricas	23
1.5. Forma polar	25
1.6. Potencias	31
1.7. Raíces	33
1.8. Formulación abstracta	35
1.9. Aplicación: Movimiento retrógrado de los planetas	36
1.10. Problemas resueltos	39
1.11. Ejercicios	41
1.12. Nota histórica	42
2. Funciones complejas	43
2.1. Funciones de variable real	43
2.2. Funciones de variable compleja	44
2.3. Límites	45
2.4. Continuidad	47
2.5. Derivadas y ecuaciones de Cauchy-Riemann	48
2.6. Funciones armónicas	52

2.7. Formulación alternativa	54
2.8. Aplicación: Campos y fluidos	56
2.9. Problemas resueltos	59
2.10. Ejercicios	60
2.11. Nota histórica	61
3. Funciones elementales	63
3.1. Polinomios	63
3.2. Función exponencial	63
3.3. Funciones trigonométricas	64
3.4. Funciones hiperbólicas	67
3.5. Logaritmo	68
3.6. Exponentes complejos	70
3.7. Inversas de funciones trigonométricas e hiperbólicas	72
3.8. Aplicación: Circuito RLC	73
3.9. Problemas resueltos	75
3.10. Ejercicios	78
3.11. Nota histórica	79
4. Integrales	81
4.1. Integrales de funciones de variable real	81
4.2. Integrales de contorno	82
4.3. Teorema de Cauchy-Goursat	88
4.4. Fórmula de Cauchy	95
4.5. Teorema de Morera	100
4.6. Cotas de funciones analíticas y el teorema fundamental del álgebra	101
4.7. Aplicación: Relaciones de dispersión y principio de causalidad	103
4.8. Problemas resueltos	105
4.9. Ejercicios	106
4.10. Nota histórica	107
5. Series	109
5.1. Sucesiones y criterios de convergencia	109
5.2. Series de potencias	112
5.3. Series de Taylor	113
5.4. Series de Laurent	116
5.5. Aplicación: Continuación analítica	120
5.6. Problemas resueltos	123
5.7. Ejercicios	125
5.8. Nota histórica	125

6. Residuos y polos	127
6.1. Singularidades	127
6.2. Ceros de una función	130
6.3. Fórmula del residuo	131
6.4. Teorema de los residuos	132
6.5. Integrales reales de funciones trigonométricas	135
6.6. Integrales reales impropias	137
6.7. Transformada inversa de Laplace	145
6.8. Integrales sobre cortes de rama	147
6.9. Aplicación: Las funciones de Green y la flecha del tiempo	149
6.10. Problemas resueltos	153
6.11. Ejercicios	158
6.12. Nota histórica	159
7. Mapeos	161
7.1. Mapeo conforme	161
7.2. Transformaciones lineales	162
7.3. Reflexión e inversión	164
7.4. Transformaciones bilineales	164
7.5. Potencias y raíces	166
7.6. Función exponencial	168
7.7. Función logarítmica	169
7.8. Funciones trigonométricas	169
7.9. Más sobre campos y fluidos	171
7.10. Aplicación: Fractales	179
7.11. Problemas resueltos	182
7.12. Ejercicios	183
7.13. Nota histórica	185
A. Apéndice: Transformadas de Laplace	187
A.1. Definición y propiedades	187
A.2. Resolución de ecuaciones diferenciales	189
A.3. Derivadas, integrales y convolución	195
A.4. Ejercicios	199
A.5. Nota histórica	199
Soluciones a los ejercicios	201
Índice alfabético	205

Motivación

LOS NÚMEROS COMPLEJOS suelen introducirse a partir de la necesidad de encontrar números que satisfagan la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$. Es bien sabido que no existe ningún número real que sea solución de esta ecuación. El dilema se resuelve definiendo la **unidad imaginaria** i como la raíz cuadrada (positiva) de menos uno:

$$i = \sqrt{-1}$$

o de una forma equivalente

$$i^2 = -1$$

En realidad, históricamente el interés por los números complejos surgió cuando se descubrieron conexiones inesperadas entre los números complejos y los reales. Por ejemplo, a Leibniz le sorprendió mucho la relación

$$\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

pues a la izquierda hay dos términos que contienen raíces cuadradas de números negativos y a la derecha el resultado es un número real. Parecía, por tanto, que los números complejos no eran tan imaginarios como cabría suponer. Con todo, no se experimentó un auténtico progreso hasta que se pusieron las bases durante el siglo XIX de un método eficaz de visualizar los números complejos geoméricamente.

El impulso definitivo en el campo de las matemáticas vino de la mano de Cauchy, quien estudió en profundidad una clase singularísima de funciones complejas denominadas funciones analíticas. Su importancia es tal que el análisis de funciones complejas se ha venido en llamar, en ocasiones, análisis de funciones analíticas. Parte de la relevancia de estas funciones proviene del hecho de que tienen aplicaciones inmediatas en física; sus componentes cumplen la ecuación de

Laplace en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En consecuencia, investigando las propiedades de funciones analíticas se pueden realizar grandes avances en termología, electrostática, óptica y física de fluidos.

En el siglo XX, Einstein descubrió que necesitaba definir un tiempo imaginario en su teoría especial de la relatividad para que el intervalo en el espacio-tiempo, ds , fuera invariante bajo las transformaciones de Lorentz. En efecto, la geometría del espacio-tiempo para el caso de movimiento en las tres dimensiones espaciales x_1 , x_2 y x_3 viene descrita por la ecuación

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2$$

donde c es la velocidad de la luz. Para que la variable temporal t entre en la ecuación con el mismo signo que las variables espaciales se define, entonces, una cuarta dimensión, $x_4 = ict$, que es imaginaria pura.

Sin embargo, fue la formulación de la mecánica cuántica la que situó las funciones complejas en un lugar preeminente dentro de la física moderna. La ecuación central de la mecánica cuántica no relativista es la llamada ecuación de Schrödinger, la cual, para una partícula moviéndose en una dimensión, toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x,t)$$

donde \hbar es la constante renormalizada de Planck, m es la masa de la partícula y $V(x)$ es un potencial externo arbitrario. En esta ecuación se observa que la unidad imaginaria aparece explícitamente en el lado izquierdo. Esto ya es, de por sí, una novedad respecto a las teorías anteriores, pero quizá es mucho más importante el hecho de que la función de onda $\psi(x,t)$, la cual describe totalmente el estado de la partícula, es una magnitud compleja. El módulo al cuadrado de $\psi(x,t)$ es un número real que representa una probabilidad y que, por tanto, puede medirse experimentalmente. La naturaleza compleja de $\psi(x,t)$ se manifiesta, además, en fenómenos espectaculares que también se detectan en el laboratorio, como efectos de interferencia de ondas de materia, corrientes a voltaje cero entre uniones superconductoras y efectos de campo magnético en regiones donde no existe campo magnético.

Las aplicaciones esbozadas anteriormente deberían eliminar cualquier reticencia ante el estudio de los números complejos. Aún así, nos sigue siendo intuitivamente difícil asignar un carácter «real» a un número complejo. Quizá la confusión aparece al querer dotar a los números imaginarios de propiedades de las que carecen, como la facultad de poder *contar* cosas. No obstante, debemos pensar que

sólo los números naturales son capaces de eso. i no es más que un símbolo como lo puede ser el signo $-$ para los números negativos, la coma para los números decimales, $\sqrt{2}$ para representar el número irracional 1,4142... ó π para definir la semilongitud de una circunferencia de radio unidad. No hay nada misterioso en i sino una gran cantidad de resultados fascinantes que trataremos de aprender durante este curso.

Ejercicios

1. Resolver la siguiente paradoja:

$$\begin{aligned}\sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\ \sqrt{\frac{-1}{1}} &= \sqrt{\frac{1}{-1}} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} \\ (\sqrt{-1})^2 &= (\sqrt{1})^2 \\ i^2 &= 1 \quad !\end{aligned}$$

Números complejos

EN ESTE CAPÍTULO introduciremos los números complejos y sus propiedades algebraicas. Descubriremos una forma alternativa de representar números complejos que resulta muy útil para realizar multiplicaciones y potencias. Esta representación se basa en la relación que existe entre la función exponencial y las funciones seno y coseno. Finalmente, aprenderemos a calcular raíces de un número complejo, derivando soluciones adicionales que no pueden deducirse sólo a partir de los números reales.

1.1. Definición

Definición. Un número **complejo** z se expresa de la siguiente forma:

$$z = a + ib$$

donde a y b son números reales. La **parte real** de z es

$$\operatorname{Re}(z) = a$$

y la **parte imaginaria** de z es

$$\operatorname{Im}(z) = b$$

Aunque se denomine imaginaria, la parte imaginaria es un número real, igual que la parte real.

Cuando la parte real de z es cero ($a = 0$), se dice que $z = ib$ es **imaginario puro** por tener sólo parte imaginaria. Obviamente, cuando la parte imaginaria es cero ($b = 0$), el número z es real. Por eso, los números reales no son más que un caso especial de los números complejos.

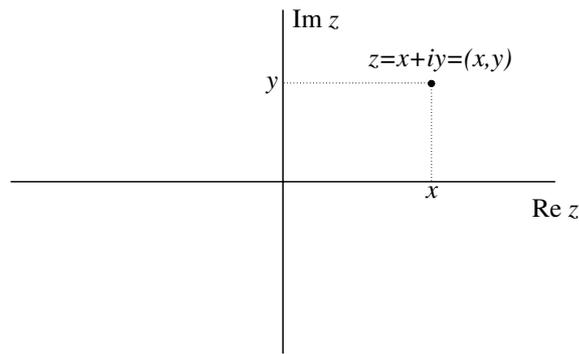


Figura 1.1: Representación geométrica de z en coordenadas cartesianas.

1.2. Representación gráfica

La caracterización de un número complejo mediante un par de números reales (las partes reales e imaginarias) sugiere que podemos utilizarlas como coordenadas en el plano para representar gráficamente el número $z = (x, y)$. Así, la representación resultante es muy similar a la de los vectores en \mathbb{R}^2 . El eje x , horizontal, de abscisas o **real** corresponde a $\text{Re}(z)$ mientras que el eje y , vertical, de ordenadas o **imaginario** corresponde a $\text{Im}(z)$. De ahí que la forma $z = a + ib$ también reciba el nombre de representación en **coordenadas rectangulares** o **cartesianas** (véase figura 1.1). El plano complejo también puede llamarse plano z o diagrama de Argand.

El número complejo que surge de la reflexión de z alrededor del eje real se denomina **complejo conjugado** de z y se denota como z^* . En coordenadas rectangulares, no hay más que cambiar de signo a la parte imaginaria¹:

$$z^* = a - ib$$

▷ EJEMPLO. Sea $z = \sqrt{3} + i$. Hallar $\text{Re}(z^*)$ e $\text{Im}(z^*)$.

Calculamos primero el complejo conjugado: $z^* = \sqrt{3} - i$. Por tanto, $\text{Re}(z^*) = \sqrt{3}$ e $\text{Im}(z^*) = -1$ (sería incorrecto escribir $\text{Im}(z^*) = -i$). Fíjese que, en general, se verifica que $\text{Re}(z^*) = \text{Re}(z)$ y que $\text{Im}(z^*) = -\text{Im}(z)$ para todo z .

De forma análoga a los vectores en \mathbb{R}^2 , se define el **módulo** de un número complejo $z = a + ib$ como la distancia de z al origen:

$$\text{mod}(z) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es importante señalar que $\text{mod}(z)$ es siempre un número real y positivo.

¹ El asterisco representa la notación más frecuente en física e ingeniería. En matemáticas se prefiere emplear la notación \bar{z} .

▷ EJEMPLO. Sea $z = \sqrt{3} - i$. Hallar $|z|$.

La parte real es $a = \sqrt{3}$ y la parte imaginaria, $b = -1$. En consecuencia,

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Una característica importante de los números complejos y que se utiliza con frecuencia es la condición de **equivalencia**. Dos números complejos $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$ son equivalentes, es decir, $z_1 = z_2$ si y solo si las partes reales y las imaginarias son iguales:

$$z_1 = z_2 \iff a = c \text{ y } b = d$$

Esta condición proporciona *dos* ecuaciones para la igualdad entre números complejos debido al carácter *bidimensional* de estos números.

1.3. Propiedades algebraicas

Sean dos números complejos $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$.

Definición. La **suma** de z_1 y z_2 es una operación que genera un nuevo número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

Geoméricamente, la suma de dos números complejos es equivalente a la suma vectorial en \mathbb{R}^2 .

De la definición anterior es inmediato ver que la suma de números complejos cumple las propiedades de la suma de número reales:

1. *Conmutativa*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. *Asociativa*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
3. *Elemento neutro*: $0 + z = z$
4. *Elemento opuesto*: $z + (-z) = 0$

No hay que confundir el elemento opuesto, al que se le cambia de signo las partes reales e imaginarias, con el complejo conjugado, en el que sólo se cambia de signo la parte imaginaria.

▷ EJEMPLO. Sean $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$. Hallar la suma y la diferencia.

Calculamos la suma:

$$z = z_1 + z_2 = (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = 4$$

Observamos que el resultado es igual a $2\operatorname{Re} z$ debido a que $z_2 = z_1^*$. En general, para cualquier z se tiene que

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}$$

Ahora calculamos la diferencia:

$$z = z_1 - z_2 = (2 + \sqrt{3}i) - (2 - \sqrt{3}i) = 2i\sqrt{3}$$

que equivale a $2i\operatorname{Im} z$. En realidad, para todo z se cumple que

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}$$

Definición. El **producto** de z_1 y z_2 se obtiene al multiplicar los binomios $a + ib$ y $c + id$ y utilizando la relación $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

El significado geométrico no es tan evidente como en el caso de la suma y de *ningún modo* podemos asociar el producto de números complejos al producto escalar o vectorial de vectores en \mathbb{R}^2 . Esto hace que la expresión en coordenadas rectangulares no sea del todo satisfactoria ya que es muy útil tener una visualización espacial de las operaciones algebraicas. De hecho, las construcciones geométricas fueron la principal herramienta en las demostraciones matemáticas durante cientos de años. En la sección siguiente, veremos una expresión alternativa de z que es mucho conveniente a la hora de representar gráficamente el producto de números complejos.

Al igual que la suma, el producto verifica las propiedades usuales:

1. *Conmutativa*: $z_1 z_2 = z_2 z_1$
2. *Asociativa*: $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
3. *Elemento neutro*: $1 z = z$
4. *Elemento inverso*: $\frac{1}{z} z = 1$

Por último, la suma y el producto están relacionados mediante la propiedad *distributiva*:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$$

Cuando un conjunto de números cumple las propiedades expuestas antes, se dice entonces que forma un **cuerpo**. Denotaremos el cuerpo de los números complejos como \mathbb{C} .

▷ EJEMPLO. Sean $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = i$. Hallar el producto $z = z_1z_2$.

Aplicamos la definición anterior:

$$z = (1 + 3i)(i) = i + 3i^2 = i - 3 = -3 + i$$

Si representamos z en el plano complejo, observamos que, al multiplicar z_1 por i , z_1 ha sufrido una rotación de $\pi/2$ alrededor del origen. De aquí se intuye que el producto en casos sencillos tiene que ver con *rotaciones* en el plano. Veremos este efecto con más detalle en la próxima sección.

A partir de las definiciones de complejo conjugado y producto, se puede dar una expresión alternativa para el módulo de $z = a + ib$:

$$\boxed{|z|^2 = zz^*}$$

ya que $zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

Una expresión que se utiliza a menudo es el módulo al cuadrado de la suma de z_1 y z_2 en términos de z_1 y z_2 :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |(a + c) + i(b + d)|^2 \\ &= [(a + c) + i(b + d)][(a + c) - i(b + d)] \\ &= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + bd) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1z_2^*) \end{aligned}$$

Esta expresión es similar a la fórmula del binomio con números reales, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, pero no hay que confundirlas. Asimismo, indica que el módulo al cuadrado de una suma *no* es la suma de los módulos al cuadrado. Sin embargo, el módulo del producto sí que equivale al producto de los módulos:

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

La operación «conjugado de (...)», denotada por $(...)^*$ no tiene los problemas del módulo ya que el conjugado de la suma es la suma de los conjugados:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

y el conjugado del producto es el producto de los conjugados:

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

Finalmente, el cociente o **división** de z_1 y z_2 se realiza multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Por supuesto, la división tiene sentido sólo si $z_2 \neq 0$. Así, podemos dar una expresión para el elemento inverso de la multiplicación:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Por ejemplo, el inverso de i es $1/i = -i/|i|^2 = -i$ ya que $|i|^2 = 1$ (¡no confundir con $i^2 = -1$!).

▷ EJEMPLO. Sean $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = i$, como en el ejemplo anterior. Hallar ahora el cociente $z = \frac{z_1}{z_2}$.

$$z = \frac{1 + 3i}{i} = \frac{(1 + 3i)(-i)}{i(-i)} = 3 - i$$

También podríamos haber utilizado el hecho de que $1/i = -i$ y haber reducido la división anterior a una mera multiplicación:

$$z = \frac{1 + 3i}{i} = (1 + 3i)(-i) = 3 - i$$

▷ EJEMPLO. Demostrar que $z = \frac{-5}{3 - 4i} - \frac{4}{5i}$ es un número real.

Realizamos las operaciones indicadas:

$$z = \frac{-5(3 + 4i)}{|3 - 4i|^2} - \frac{4(-5i)}{|5i|^2} = \frac{-15 - 20i}{25} - \frac{-20i}{25} = \frac{-3}{5}$$

Otra forma de llegar al mismo resultado es utilizar las propiedades conocidas de las fracciones, que funcionan igual de bien con los números complejos:

$$z = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4} = \frac{-25i - 12 + 16i}{20 + 15i} = \frac{(-12 - 9i)(20 - 15i)}{15^2 + 20^2} = \frac{-3}{5}$$

1.4. Propiedades geométricas

Al representar un punto en el plano mediante el número complejo z , podemos escribir fórmulas de geometría analítica utilizando z en lugar de las variables usuales x e y . Recordemos que x denota la coordenada horizontal e y , la vertical. Por eso, asignamos x a la parte real de z e y , a su parte imaginaria: $z = x + iy$. A veces, este modo de proceder da lugar a expresiones más elegantes gracias a una notación más concisa.

- ▷ EJEMPLO. Interpretar gráficamente el conjunto de puntos determinado por $\text{Im}(z^* + i) = 2$.

Sustituyendo $z = x + iy$ en la expresión anterior, obtenemos:

$$\text{Im}(z^* + i) = \text{Im}(x + i(-y + 1)) = 1 - y = 2$$

Luego el conjunto de puntos pedido corresponde a la recta horizontal $y = -1$.

- ▷ EJEMPLO. Interpretar gráficamente el conjunto de puntos determinado por $|z - i| \leq \sqrt{3}$.

De forma análoga al ejemplo anterior, hacemos uso de la sustitución $z = x + iy$:

$$|z - i| = |x + i(y - 1)| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \leq \sqrt{3}$$

La última expresión equivale a

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 3$$

que corresponde a la región circular centrada en $(0, 1)$ y radio $\sqrt{3}$.

Del ejemplo anterior se puede extraer la conclusión de que las expresiones del tipo $|z - z_0|$ tienen que ver con la distancia entre puntos del plano, ya que la definición de círculo corresponde precisamente al conjunto de puntos cuya distancia al centro es menor o igual a un cierto número real. En efecto, la expresión

$$|z_1 - z_2|$$

corresponde a la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en el plano complejo. Veamos una aplicación de esta idea con el siguiente ejemplo.

- ▷ EJEMPLO. Hallar la condición de perpendicularidad entre dos segmentos del plano complejo.

Sea el triángulo rectángulo formado por los vértices 0 , z y w , donde 0 es el vértice recto. Entonces, el segmento de recta que va de 0 a z es perpendicular al que va de 0 a w . Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la distancia de z a w (es decir, la longitud del segmento que va de z a w):

$$|z - w| = \sqrt{|z|^2 + |w|^2}$$

Por otro lado, habíamos visto un poco más arriba que, dados dos números complejos cualesquiera, se cumplía la siguiente igualdad:

$$|z - w| = \sqrt{|z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(zw^*)}$$

La única forma de que ambas ecuaciones se satisfagan es exigir que

$$\operatorname{Re}(zw^*) = 0$$

lo cual da la condición de perpendicularidad entre los dos segmentos $\overline{0z}$ y $\overline{0w}$. Por ejemplo, el segmento que va desde el origen a i y el comprendido entre 0 y -2 son ortogonales entre sí puesto que $\operatorname{Re}[i(-2)^*] = \operatorname{Re}(-2i) = 0$.

Las leyes de la geometría analítica en el plano real, reescritas en el lenguaje de los números complejos tal y como como ilustra el ejemplo anterior, son igualmente válidas en el plano complejo. Quizá el caso más importante lo constituya la denominada desigualdad triangular, que se puede enunciar del siguiente modo:

Teorema. Sean z_1 y z_2 dos números complejos. Entonces:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Demostración. Utilizamos la expresión, encontrada anteriormente, para el módulo al cuadrado de la suma de dos números complejos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \underbrace{2\operatorname{Re}(z_1 z_2^*)}_{\leq 2|z_1 z_2^*| \text{ ya que } \operatorname{Re} z \leq |z|} \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2^*| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

Eliminando cuadrados, se obtiene el enunciado requerido. Esta desigualdad, llamada triangular, se empleará en ciertas demostraciones a lo largo del curso. \square

Damos, ahora sin demostración, otras desigualdades notables:

$$\begin{aligned} |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 + z_2| \\ ||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 + z_2| \\ |z_1 - z_2| &\leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3| \end{aligned}$$

La última desigualdad es geoméricamente evidente: la distancia entre dos puntos debe ser menor o igual que la suma de las distancias de cada punto a un tercero. Poniendo $z_3 = 0$, recuperamos la desigualdad triangular.

1.5. Forma polar

Habíamos visto que las expresiones que se deducen del producto y la división de dos números complejos escritos en la representación cartesiana eran algo complicadas. Estudiaremos ahora una representación alternativa que es preferible en muchos casos a la representación en coordenadas rectangulares y que resulta ser extremadamente útil en ciertas situaciones que quedarán claras enseguida.

La forma polar requiere un paso previo, pues debemos escribir primero el número $z = x + iy$ en la representación trigonométrica. Elegimos, en lugar de las coordenadas x e y , dos números que especifiquen totalmente y sin ambigüedad el número z , a saber, la distancia al origen, la cual equivale a $\text{mod}(z)$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y el ángulo θ que se mide en sentido antihorario a partir del semieje $x > 0$:

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$$

Podemos invertir las ecuaciones anteriores y escribir la parte real x y la parte imaginaria y en términos de r y θ :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \text{sen } \theta \end{aligned}$$

Entonces, un número $z = x + iy$ dado se puede escribir así (véase la figura 1.2):

$$z = |z| \cos \theta + i|z| \text{sen } \theta$$

Ya habíamos mencionado que $|z|$ es el **módulo** de z . El ángulo polar θ recibe el nombre de **argumento** o **fase**:

$$\theta = \arg(z)$$

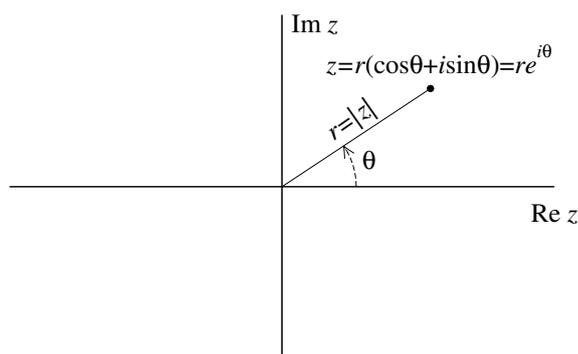


Figura 1.2: Representación z en términos de la distancia al origen r y el ángulo polar θ .

▷ EJEMPLO. Expresar $z = 1 - i$ en la representación trigonométrica.

La parte real es $x = 1$ mientras que la parte imaginaria es $y = -1$. Hallamos primero el módulo:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

A continuación, calculamos el argumento:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Por tanto, z toma la siguiente forma:

$$z = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - i\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

Un aspecto fundamental a tener en cuenta es que, como la variable $\arg(z)$ es un ángulo, existe un número infinito de fases igualmente válidas que difieren en múltiplos de 2π . Así, en el ejemplo anterior podríamos perfectamente haber escogido los ángulos $\theta = -\pi/4 + 2\pi = 7\pi/4$, $\theta = -\pi/4 + 4\pi = 15\pi/4$, etc. Para eliminar esta ambigüedad, usaremos la denominación **argumento principal**, $\operatorname{Arg}(z)$, cuando se cumpla que

$$-\pi < \theta \leq \pi$$

Dicho de otro modo, la determinación principal del argumento viene dada por $-\pi < \theta \leq \pi$. Por ejemplo, el argumento principal de $1 - i$ es $\operatorname{Arg}(z) = -\pi/4$. Nótese que $\operatorname{Arg}(z)$ es *único*, pero $\arg(z)$ no lo es, debido a la periodicidad angular mencionada. Ambos están relacionados mediante

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Otro aspecto que no hay que olvidar es que la fase se calcula a partir de la función $\operatorname{tg} \theta$. Ahora bien, la tangente tiene periodo π , no 2π . Por tanto, hay que localizar primero el cuadrante donde está situado z . Veámoslo con un ejemplo.

▷ EJEMPLO. Expresar $z = -1 + i$ en la representación trigonométrica.

La parte real es $x = -1$ y la parte imaginaria es $y = 1$. El módulo es el mismo que el del ejemplo anterior:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

A continuación, calculamos el argumento de la misma forma:

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{INCORRECTO}$$

El cálculo de la fase no es correcto, pues el módulo y el argumento de $z = -1 + i$ no pueden equivaler a los de $z = 1 - i$, ya que se trata de dos números distintos. El problema radica en que $z = -1 + i$ se sitúa en el segundo cuadrante. Luego la fase no es $\theta = -\pi/4$, que corresponde a un ángulo en el cuarto cuadrante, sino $\theta = 3\pi/4$.

La lección que se extrae del ejemplo anterior es que la relación

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

es sólo válida cuando $z = x + iy$ está situado en el cuadrante *primero* o en el *cuarto*. Para el *segundo* cuadrante se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\theta = \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

mientras que para el *tercer* cuadrante se verifica

$$\theta = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

La forma trigonométrica no es más útil que la forma cartesiana para multiplicaciones y divisiones. El gran avance consiste en utilizar la **fórmula de Euler**:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$$

Esta expresión se demuestra identificando, por separado, las expansiones de Taylor para las funciones seno, coseno y exponencial. En efecto, tomamos del análisis de funciones de variable real las siguientes series infinitas:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \\ i \operatorname{sen} \theta &= i\theta - i\frac{1}{3!}\theta^3 + i\frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado, la función exponencial se puede desarrollar así:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \frac{1}{5!}(i\theta)^5 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \right) \\ &\quad + \left(i\theta - i\frac{1}{3!}\theta^3 + i\frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos usado el hecho de que $i^2 = -1$, $i^3 = i^2i = -i$, $i^4 = i^2i^2 = 1$, etc. Comparando los términos entre paréntesis con las series para el coseno y el seno escritas arriba, se llega a la fórmula de Euler. Sin embargo, la demostración está incompleta, pues aún no hemos hablado de series de funciones de variable compleja ni hemos probado que dichas series converjan. Esto se dejará para el capítulo 5. Por el momento, nos basta con esta prueba heurística y tomaremos la fórmula de Euler como válida.

Sustituyendo $\theta = \pi$ se llega a la siguiente identidad, quizá la más conocida de todas las matemáticas:

$$e^{i\pi} = -1$$

pues relaciona de manera muy bella cuatro números fundamentales.

Es importante observar que

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1$$

para todo θ , sugiriendo que todos los resultados trigonométricos pueden deducirse de las propiedades de la función exponencial compleja. De hecho, podemos escribir las funciones seno y coseno en términos únicamente de funciones exponenciales. Para ello, calculamos primero el complejo conjugado de la fórmula de Euler:

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$$

A continuación, empleamos las relaciones encontradas en la página 20 entre las partes reales e imaginarias y z y z^* , donde $z = e^{i\theta}$ y $z^* = e^{-i\theta}$. Se halla:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Al fin, llegamos a nuestro objetivo: escribir un número complejo z en su forma polar (o exponencial). Sustituyendo la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$ en la representación trigonométrica $z = |z| \cos \theta + i|z| \sen \theta$, encontramos

$$z = |z|e^{i\theta}$$

donde recordamos que $\theta = \arg(z)$.

- ▷ EJEMPLO. Escribir $z = -1 + i$ en forma polar e indicar el argumento principal.

En el ejemplo anterior, vimos que $|z| = \sqrt{2}$ y $\arg z = 3\pi/4 + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Entonces, la forma polar es

$$z = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Para encontrar el argumento principal, hemos de encontrar cuál de los ángulos $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi = \dots - \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \dots$, está dentro del intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$. Vemos que el único ángulo que lo satisface es $\text{Arg}(z) = 3\pi/4$.

- ▷ EJEMPLO. Escribir los siguientes números en forma exponencial e indicar el argumento principal.

1. $z = 1 \implies z = e^{2in\pi}, \quad \text{Arg } z = 0$
2. $z = i \implies z = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}, \quad \text{Arg } z = \frac{\pi}{2}$
3. $z = -1 \implies z = e^{i\pi(2n+1)}, \quad \text{Arg } z = \pi$
4. $z = -i \implies z = e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}, \quad \text{Arg } z = -\frac{\pi}{2}$

En todos los casos anteriores, hemos tomado, como siempre, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si representamos los puntos anteriores, vemos que se localizan sobre la circunferencia de radio unidad ya que $|z| = 1$ para todos ellos.

Ya hemos avanzado que la forma polar es particularmente útil a la hora de evaluar productos y cocientes de números complejos. Dados z_1 y z_2 en forma polar, hallamos el producto

$$z = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

y el cociente

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Estas expresiones son mucho más sencillas que las que obtuvimos en coordenadas rectangulares. Esta simplicidad se debe, en parte, a que los argumentos sólo hace falta sumarlos o restarlos, es decir:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Sin embargo, no hay que caer en la tentación de emplear el mismo razonamiento con el argumento principal, ya que, en general,

$$\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$$

pues puede ocurrir que la suma de la derecha exceda el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ y no sea igual al término de la izquierda. A veces puede ocurrir que se satisfaga la igualdad, pero eso será sólo una casualidad. Al calcular el argumento principal de un producto, primero hay que realizar la multiplicación y, *sólo después*, hallar el argumento principal.

▷ EJEMPLO. Calcular $z = z_1 z_2$ si $z_1 = -1$ y $z_2 = i$, y explicar la razón por la cual $\text{Arg}(z_1 z_2) \neq \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$.

Es fácil realizar la multiplicación:

$$z = (-1)i = -i = e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}, \quad \text{Arg } z = -\frac{\pi}{2}$$

Sin embargo, si realizamos la multiplicación en polares quedándonos sólo con el argumento principal,

$$z = (-1)i = e^{i\pi} e^{i\pi/2} = e^{3i\pi/2} \quad \text{INCORRECTO}$$

estaríamos cometiendo un error, ya que el argumento principal de $z = -i$ no es $3\pi/2$ (que está fuera del intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$) sino $-\pi/2$ como ya hemos visto antes. Esto no quiere decir que no podamos multiplicar números en forma polar, sino que tenemos que hacerlo con cuidado:

$$\begin{aligned} z &= (-1)i = e^{i(\pi + 2\mu\pi)} e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\nu\pi)} \quad (\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ &= e^{i(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi)} \quad (n = \mu + \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

El resultado anterior es enteramente correcto. Ahora y sólo después de haber hecho la multiplicación, calculamos el argumento principal. Vemos que éste tiene lugar cuando $n = -1$, esto es, $\text{Arg}(z) = -\pi/2$, exactamente igual que lo que obtuvimos arriba.

Dado $z = |z|e^{i\theta}$, el complejo conjugado en forma polar también adquiere una expresión sencilla:

$$z^* = |z|e^{-i\theta}$$

- ▷ EJEMPLO. Hallar el patrón de interferencia de dos osciladores de igual frecuencia y amplitud, pero diferentes fases, θ_1 y θ_2 .

Sabemos que la coordenada x de un oscilador clásico viene dada, a cualquier tiempo t , por $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta_1)$ donde x_0 la amplitud y ω la frecuencia de oscilación. La misma ecuación puede describir la componente de una onda electromagnética, siendo x_0^2 la intensidad de la onda en ese punto. ¿Cuál será el efecto combinado de dos ondas? Deberíamos calcular la suma $x_0 \cos(\omega t + \theta_1) + x_0 \cos(\omega t + \theta_2)$. Esto se puede hacer de forma mucho más fácil con números complejos. Sean los osciladores

$$\begin{aligned} z_1(t) &= |z_1| e^{i(\omega t + \theta_1)} \\ z_2(t) &= |z_2| e^{i(\omega t + \theta_2)} \end{aligned}$$

La intensidad de la onda combinada $z = z_1 + z_2$ será

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\ &= \left[|z_1| e^{i(\omega t + \theta_1)} + |z_2| e^{i(\omega t + \theta_2)} \right] \left[|z_1| e^{-i(\omega t + \theta_1)} + |z_2| e^{-i(\omega t + \theta_2)} \right] \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1| |z_2| \left[e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} \right] \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

El efecto de interferencia es el término proporcional a $\cos(\theta_1 - \theta_2)$. Observamos que la intensidad de dos ondas que interfieren no es igual a la suma de las intensidades. Si las ondas están en fase y las amplitudes son iguales, $\theta_1 = \theta_2$ y $|z_1| = |z_2|$, la ecuación anterior nos dice que la intensidad es *cuatro* veces la intensidad de una de las ondas (interferencia *constructiva*) mientras que si están fuera de fase, $\theta_1 = \theta_2 + \pi$, la intensidad es *cero* (interferencia *destructiva*). El patrón resultante de zonas brillantes y zonas oscuras es característico del movimiento ondulatorio y lo sorprendente es que se manifiesta también con partículas materiales, como el electrón, lo que constituye una prueba espectacular de las leyes de la mecánica cuántica a nivel microscópico.

1.6. Potencias

Al igual que la multiplicación, la operación de elevar un número complejo a un número real es mucho más fácil de realizar si el número complejo está escrito en forma polar. Por ejemplo, sea el número natural $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$z^n = \left(|z| e^{i\theta} \right)^n = |z|^n e^{in\theta}$$

▷ EJEMPLO. Dado $z = 1 + i\sqrt{3}$, calcular z^5 .

Podríamos utilizar la fórmula del binomio y desarrollar $(1 + i\sqrt{3})^5$. Pero creemos que es más fácil pasar primero z a su forma exponencial:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \implies z = 2e^{i\pi/3}$$

Ahora podemos calcular rápidamente la potencia pedida:

$$z^5 = 2^5 e^{5i\pi/3} = 32 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right)$$

Finalmente, deshacemos el cambio a polares, volviendo a la forma cartesiana:

$$z^5 = 32 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16 - i16\sqrt{3}$$

Expresemos ahora la potenciación de un número complejo en la representación trigonométrica:

$$z^n = |z|^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n$$

Ahora bien, la fórmula de Euler establece que

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

Por tanto, usando la forma polar $z^n = |z|^n e^{in\theta}$, encontramos la siguiente identidad:

$$\boxed{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n}$$

resultado que se conoce con el nombre de **fórmula de De Moivre**. Esta fórmula es increíblemente útil para derivar fórmulas trigonométricas.

▷ EJEMPLO. Demostrar que

$$\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

Empleamos la fórmula de De Moivre para $n = 3$:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta - 3 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + i(3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta) \end{aligned}$$

Los dos miembros de la ecuación son iguales si y sólo si son iguales sus partes reales e imaginaria:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \implies \cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$$

$$\sen 3\theta = -\sen^3 \theta + 3(1 - \sen^2 \theta) \sen \theta \implies \sen^3 \theta = \frac{3}{4} \sen \theta - \frac{1}{4} \sen 3\theta$$

Nótese que, gracias a que la equivalencia de números complejos implica dos condiciones, este método nos ha proporcionado una segunda fórmula trigonométrica.

1.7. Raíces

El cálculo de la raíz enésima de un número complejo, $z^{1/m}$ con $m \in \mathbb{N}$, es algo más complicado que el cálculo de potencias puesto que, en general, $z^{1/m}$ tiene m raíces distintas. Este resultado nos es familiar del álgebra real, pues $z = 4^{1/2}$ tiene, como sabemos, dos raíces: $z = \pm 2$. Sin embargo, si aumentamos un poco m , los números reales no nos generan más raíces (tómese, por ejemplo, $8^{1/3} = 2$, que sólo tiene una). ¿De dónde salen, pues, las otras raíces en \mathbb{C} ? Esperemos que quede claro con el siguiente ejemplo:

▷ EJEMPLO. Sea $z = 8$. Hallar $w = z^{1/3}$.

Primero, escribimos z en notación exponencial:

$$z = 8e^{2in\pi} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Entonces:

$$w = z^{1/3} = 2e^{2in\pi/3} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Ahora bien, $n = 0$ reproduce la raíz que ya conocíamos ($w_{n=0} = 2$). Para $n = 1$ obtenemos el siguiente número:

$$w_{n=1} = 2e^{2i\pi/3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sen \frac{2\pi}{3} \right) = -1 + i\sqrt{3}$$

que es una raíz distinta de $w_{n=0}$ y satisface igualmente $(-1 + i\sqrt{3})^3 = 8$. La tercera raíz sale de considerar el caso $n = 2$:

$$w_{n=2} = 2e^{4i\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}$$

Podemos ahora preguntarnos si existen más soluciones. Representando gráficamente $w_{n=0}$, $w_{n=1}$ y $w_{n=2}$, observamos que $w_{n=3} = 2e^{2i\pi} = 2$ coincide con $w_{n=0}$ y, por tanto, no es una raíz distinta. Así pues, para $n \geq 3$ las raíces se van repitiendo periódicamente. Si ahora escogemos los casos $n < 0$, recorreremos las mismas raíces, pero en sentido inverso.

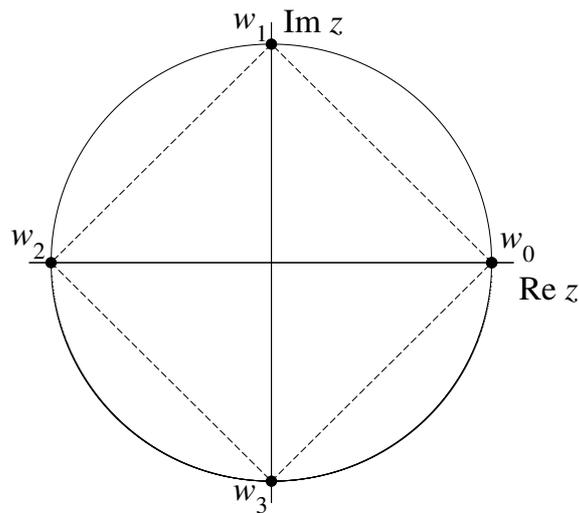


Figura 1.3: Soluciones de la ecuación ciclotómica para $n = 4$.

En consecuencia, el método para hallar las raíces de un número complejo z consiste en (i) pasar z a la forma exponencial más general (no quedarse sólo con el argumento principal) y (ii) hallar las $n = 0, \dots, m - 1$ raíces dando valores sucesivos a n .

De todas las raíces, se denomina **raíz principal** la correspondiente a utilizar el argumento principal de z . En el ejemplo anterior, la raíz principal de $z = 8$ es $w_{m=0} = 2$ puesto que $\text{Arg}(z) = 0$.

▷ EJEMPLO. Resolver la denominada ecuación ciclotómica: $w^n = 1$, donde $w \in \mathbb{C}$.

Resolver la ecuación ciclotómica equivale a hallar las n raíces de la unidad, $1^{1/n}$. Con números reales, la respuesta es fácil: la unidad sólo tiene una raíz (igual a 1) si n es impar y dos raíces (1 y -1) si n es par. Pero con números complejos nos aguarda una sorpresa.

Sea $z = 1 = e^{2i\pi m}$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Entonces, las soluciones son:

$$w_m = e^{2i\pi m/n}$$

Para $n = 4$, tenemos que las cuatro raíces distintas son

$$w_{n=0} = 1 \quad (\text{la raíz principal})$$

$$w_{n=1} = e^{2i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$$

$$w_{n=2} = e^{2i\pi 2/4} = e^{i\pi} = -1$$

$$w_{n=3} = e^{2i\pi 3/4} = e^{3i\pi/2} = -i$$

$w_{n=4} = e^{2i\pi/4} = e^{i\pi} = -1$ es igual a $w_{n=0}$ y aquí paramos la sucesión. Representando $w_{0,1,2,3}$ en la figura 1.3, vemos que forman los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio unidad. Igualmente, las raíces que corresponden al caso $n = 6$ forman un hexágono inscrito, etc., de ahí la importancia de la ecuación ciclotómica, pues permite construir polígonos de n lados inscritos en la circunferencia de radio unidad.

1.8. Formulación abstracta

Una forma equivalente de introducir los números complejos se basa en considerar z como el **par ordenado** $z = (x, y)$ donde $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$. En general, (x, y) no describe el mismo punto en el plano que (y, x) , de ahí la importancia de la ordenación.

Sin mencionar la existencia de i , *definimos* la suma

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

y el producto

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

de los dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$. De la última definición se deduce que $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, que es una forma un poco enrevesada, pero equivalente, de escribir $i^2 = -1$.

Las propiedades enumeradas en la sección 1.3 respecto a las operaciones suma y producto (conmutativa, asociativa y distributiva) más el hecho de que las dos operaciones posean elementos inversos

$$\begin{aligned} -z &= (-x, -y) \\ z^{-1} &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

para que se puedan definir las operaciones inversas (sustracción o resta y división o cociente) hacen que el conjunto de los números complejos \mathbb{C} sea un cuerpo o campo².

Obviamente, la ventaja de esta formulación no es operacional, pues es mucho más rápido calcular expresiones utilizando las propiedades de i . Aun así, la formulación abstracta es sistemática y, al proporcionar una visión de los complejos como números *bidimensionales*, podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿pueden generalizarse los números complejos a espacios de dimensión más alta?

² También forman cuerpos el conjunto de los números racionales y el de los números reales, pero no los números naturales ni los enteros.

Hamilton descubrió que esta generalización no era posible en el espacio tridimensional, pero que sí existía una analogía en *cuatro* dimensiones. Puesto que en el espacio de dos dimensiones, un número complejo $z = 1a + ib$ se expresa en términos de dos «vectores» unitarios (1 e i), en cuatro dimensiones se han de introducir cuatro vectores unitarios: 1, i , j y k , donde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Por tanto, un número complejo en cuatro dimensiones, denominado **cuaternión**, se escribe en la forma

$$z = a1 + bi + cj + dk$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Hamilton demostró que la suma y la multiplicación de cuaterniones obedecían las mismas reglas que los números complejos bidimensionales, pero para poder definir la división hubo de suponer que la multiplicación *no* era conmutativa sino que los vectores unitarios satisfacían una suerte de propiedad cíclica:

$$ij = k = -ji \quad jk = i = -kj \quad ki = j = -ik$$

Utilizando la primera de estas relaciones, podemos expresar un cuaternión mediante dos números complejos:

$$z = a1 + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$$

Sorprendentemente, este conjunto de números tan abstractos tiene aplicaciones físicas de gran importancia. Sobresale el uso de cuaterniones en la extensión de la mecánica cuántica que incluye los postulados de la relatividad especial, y que fue formulada por primera vez por Dirac. En mecánica cuántica relativista, la función de onda deja de ser un escalar y pasa a convertirse en un vector cuaterniónico de dos componentes. Puesto que un cuaternión se escribe como dos números complejos, se puede demostrar que la función de onda de Dirac describe partículas con un grado de libertad interno (*espín 1/2*). ¿Pero cuál es el significado físico de las dos componentes? En 1928 Dirac encontró que una de ellas tenía siempre energía negativa y de ahí predijo la existencia de las *antipartículas*³.

1.9. Aplicación: Movimiento retrógrado de los planetas

En esta sección utilizaremos la forma exponencial de los números complejos para explicar cualitativamente el movimiento aparentemente retrógrado que tienen los planetas vistos desde la Tierra. La formulación con números complejos resulta elegante y los cálculos no son demasiado farragosos.

³ La antipartícula del electrón, el positrón, fue detectada cuatro años más tarde por C. D. Anderson.

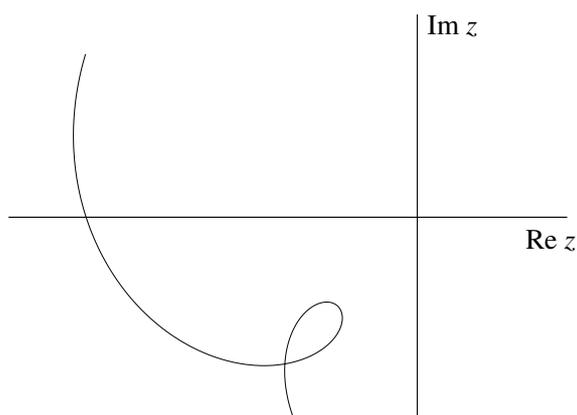


Figura 1.4: Ejemplo de movimiento retrógrado derivado de las ecuaciones de la sección 1.9.

Es conocido que, vistos desde la Tierra, los planetas exteriores a la órbita terrestre, siguen trayectorias no uniformes. Si registramos observaciones sistemáticas de la posición de un planeta durante un año, parece como si el planeta, a veces, avanzara y retrocediera por el firmamento. Este fenómeno dio muchos quebraderos de cabeza al sistema astronómico ptolemaico y no se comprendió en profundidad hasta que aparecieron los trabajos de Kepler y Newton. Explicar dicho movimiento retrógrado (ver figura 1.4) es sencillo usando números complejos ya que la forma exponencial permite parametrizar curvas sobre el plano de una manera muy fácil. Por ejemplo,

$$z(t) = Re^{it}$$

representa la circunferencia $|z| = R$ cuando hacemos variar el parámetro t de 0 a 2π . En nuestro caso, t va a ser el tiempo. Por tanto, sea

$$z_T(t) = e^{2\pi it}$$

la posición de la Tierra en el plano cuyo centro de coordenadas lo representa el Sol y donde hemos tomado la distancia Tierra-Sol igual a 1 unidad astronómica. Empezando en $t = 0$, tras $t = 1$ año la Tierra completa una órbita circular alrededor del Sol (la órbita en realidad es elíptica, pero con una excentricidad tan pequeña que preferimos simplificar el problema).

Sea

$$z_M(t) = re^{2\pi it/\tau}$$

la posición de otro planeta (por ejemplo, Marte). r es la distancia al Sol en unidades astronómicas y τ es el periodo del planeta en años terrestres. Entonces, desde

la Tierra el planeta se encontrará a la distancia relativa

$$d(t) = z_M(t) - z_T(t) = re^{2\pi it/\tau} - e^{2\pi it} \equiv \rho(t)e^{i\theta(t)}$$

Por supuesto, la distancia física es $\rho(t)$, siendo $d(t)$ el «vector» que une los puntos T y M . Si $\theta(t)$ es una función monótonamente creciente del tiempo, entonces desde la Tierra no se observaría ningún movimiento anómalo. Nuestro objetivo, pues, es calcular $\theta(t)$ y estudiar su comportamiento cuando t aumenta.

En primer lugar, pasamos a coordenadas rectangulares:

$$d(t) = \left(r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t \right) + i \left(r \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t \right)$$

Luego el argumento de $d(t)$ es:

$$\theta(t) = \operatorname{arctg} \frac{r \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t}{r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t}$$

Para ver si esta función es monótona o no, calculamos su derivada $\theta' = d\theta/dt$:

$$\theta' = \frac{2\pi}{1 + \theta(t)^2} \frac{\eta(t)}{\left(r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t \right)^2}$$

donde hemos definido la función

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \left(\frac{r}{\tau} \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t \right) \left(r \cos \frac{2\pi t}{\tau} - \cos 2\pi t \right) \\ &+ \left(\frac{r}{\tau} \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t \right) \left(r \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \sin 2\pi t \right) \end{aligned}$$

Basta estudiar el signo de $\eta(t)$ pues los otros términos que entran en la expresión de θ' son siempre positivos para todo t . Simplificando, tenemos que

$$\eta(t) = 1 + \frac{r^2}{\tau} - r \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) \cos \left[2\pi t \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \right]$$

Buscamos ahora los extremos relativos de $\theta(t)$ haciendo $\eta(t) = 0$. Utilizando la tercera Ley de Kepler, que relaciona el periodo de un planeta con su distancia al Sol:

$$\tau^2 = r^3$$

obtenemos la siguiente condición:

$$\cos \left[2\pi t \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \right] = \frac{r + r^{1/2}}{1 + r^{3/2}}$$

La función que aparece el miembro izquierda de la ecuación es siempre menor que 1 ya que $r > 0$. Como el coseno está acotado entre -1 y 1 , cabe, en principio, algún t para el cual se satisface la condición anterior. Es decir, la función $\theta(t)$ posee, en general, algún máximo o mínimo local. Luego no es monótona y eso se tiene que reflejar en que el planeta parezca avanzar y retroceder si lo observamos desde la Tierra.

1.10. Problemas resueltos

□ PROBLEMA. Representar gráficamente los siguientes números complejos:

$$(a) \frac{1+2i}{3-4i} \quad (b) \operatorname{Im} \left[\frac{2}{(1+i)^2} \right] \quad (c) (-64)^{1/4} \quad (d) (-i)^{2/\pi}$$

Tomar la determinación principal cuando proceda.

Solución. Reducimos los cuatro números a su forma cartesiana:

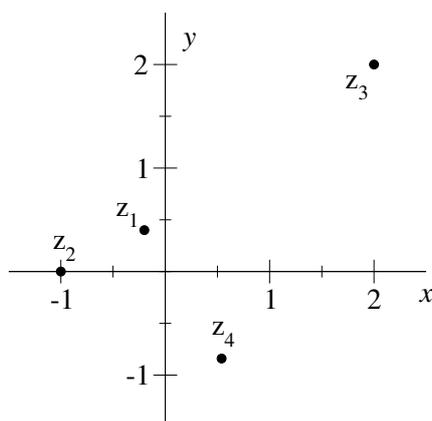
$$(a) z_1 = \frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-5+10i}{3^2+4^2} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

$$(b) z_2 = \operatorname{Im} \left[\frac{2}{(1+i)^2} \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{2}{2i} \right] = \operatorname{Im}(-i) = -1$$

$$(c) z_3 = (-64)^{1/4} = (-2^6)^{1/4} = 2^{3/2}(-1)^{1/4} = 2^{3/2}e^{i\pi/4} = 2^{3/2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 2 + 2i$$

$$(d) z_4 = (-i)^{2/\pi} = e^{\frac{2}{\pi} \ln(-i)} = e^{-i} = \cos 1 - i \operatorname{sen} 1 \simeq 0,54 - 0,84i$$

La representación en el plano \mathbb{C} puede verse a continuación.



- PROBLEMA. Determinar el conjunto de puntos que verifican las condiciones siguientes:

$$(a) |z - 2 + 3i| = 1 \quad (b) \operatorname{Re}(z^* - i) = 2$$

Solución. (a) Sea $z = x + iy$. Entonces, $z - 2 + 3i = x - 2 + i(y + 3)$ y, por tanto, $|z - 2 + 3i| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2}$. La ecuación $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 3)^2} = 1$ se satisface en los puntos pertenecientes a la circunferencia de radio 1 y centrada en el punto $(2, -3)$.

(b) Sustituyendo $z = x + iy$, se obtiene $\operatorname{Re}(z^* - i) = \operatorname{Re}(x - iy - i) = x$. La ecuación $x = 2$ corresponde a la recta vertical que pasa por el punto $(2, 0)$.

- PROBLEMA. Hallar todos los valores de $(2i)^{1/2}$ y calcular la raíz principal.

Solución. Sea $w = 2i$. Entonces:

$$w = 2i = 2e^{i\pi/2} = 2e^{i(\pi/2 + 2k\pi)} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, $z = w^{1/2} = \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + k\pi)}$. Damos valores a k hasta que encontramos el primer repetido:

$$\begin{aligned} z_{k=0} &= \sqrt{2}e^{i\pi/4} \\ z_{k=1} &= \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + \pi)} = \sqrt{2}e^{5i\pi/4} \\ z_{k=2} &= \sqrt{2}e^{i(\pi/4 + 2\pi)} = z_{k=0} \end{aligned}$$

Advertimos que para $k = 2$ se obtiene la misma raíz que para $k = 0$ ya que $e^{i2\pi}$ implica dar una vuelta completa. Así pues, únicamente existen dos soluciones distintas, $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ y $\sqrt{2}e^{5i\pi/4}$. La raíz principal es la que corresponde a $k = 0$, es decir, $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

- PROBLEMA. Resolver la ecuación

$$|e^{i\theta} - 1| = 2 \quad \text{si } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Solución. Sea el número complejo $z = e^{i\theta} - 1$. Usando la fórmula de Euler, se encuentra $z = \cos \theta - 1 + i \operatorname{sen} \theta$. Hallamos su magnitud:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{\underbrace{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta}_1 + 1 - 2 \cos \theta} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 2 \operatorname{sen}(\theta/2) \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación trigonométrica $\operatorname{sen}^2(\theta/2) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$. La ecuación del enunciado queda, entonces, $2|\operatorname{sen}(\theta/2)| = 2$, cuya solución más general es $\theta = \pi + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). El único valor que se halla dentro del intervalo pedido es $\theta = \pi$. En efecto, sustituyendo en la ecuación del enunciado, hallamos la identidad $|e^{i\pi} - 1| = |-1 - 1| = 2$.

1.11. Ejercicios

1. Dados $z = -1 + i$ y $w = 3 - 4i$, hallar:

- a) $z + w$
- b) $z - w$
- c) zw
- d) z/w
- e) $\operatorname{Im}(w/z^*)$

y comprobar la desigualdad triangular.

2. Demostrar que el triángulo con vértices en 0 , z y w es equilátero si y sólo si

$$|z|^2 = |w|^2 = 2\operatorname{Re}(zw^*)$$

3. Representar el conjunto de puntos

$$\operatorname{Re}[(m + i)z + b] = 0$$

con $m, b \in \mathbb{R}$ y explicar el significado geométrico de m y b .

4. Encontrar todas las raíces de $(16i)^{1/4}$ y representarlas gráficamente.

5. Utilizando la representación polar, demostrar la igualdad que tanto sorprendió a Leibniz:

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} + \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

Tener en cuenta sólo la raíz principal.

6. Hallar las raíces del polinomio

$$P(z) = z^2 - (1 + i)z + \frac{1}{2}$$

7. Ilustrar el movimiento retrógrado de los planetas tomando Marte como caso de estudio ($r = 1,88$):

- a) Representar gráficamente $d(t)$ y predecir el periodo (en años terrestres) entre dos movimientos retrógrados consecutivos. Comparar con datos reales y explicar el origen de posibles discrepancias.
- b) Representar gráficamente $z_M(t)$ y comprobar la relación de los bucles con los máximos o mínimos de $d(t)$.

1.12. Nota histórica

Jean Robert Argand (1768-1822) fue un librero suizo aficionado a las matemáticas. En 1806 publicó por su cuenta el trabajo donde revela la interpretación geométrica de los números complejos, y envió copias a sus amigos, una de las cuales llegó a las manos del famoso matemático francés Legendre. Casi un siglo más tarde se descubrió que el cartógrafo noruego **Caspar Wessel** (1745-1818), otro matemático aficionado, había hallado, de forma independiente y un poco antes que Argand, la misma interpretación geométrica.

Funciones complejas

EL ESTUDIO de las funciones complejas inaugura el análisis complejo. Una función compleja cuya imagen pertenece al plano \mathbb{C} exhibe propiedades muy interesantes. Veremos que una función tiene derivada sólo si cumple un par de condiciones fuertemente restrictivas. Introduciremos el concepto de función analítica, sobre el que se basará buena parte del resto de curso, y presentaremos las primeras aplicaciones físicas de estas funciones.

2.1. Funciones de variable real

Se pueden construir funciones complejas a partir de un conjunto de \mathbb{R} y, mediante una aplicación, llevarlo a \mathbb{C} , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Por ejemplo, si $x \in \mathbb{R}$, podemos definir la fórmula de Euler como la función

$$f(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Este tipo de funciones pueden representarse sin dificultad puesto que podemos reescribir f como un vector de dos componentes:

$$f = (\operatorname{Re} f(x), \operatorname{Im} f(x))$$

y dibujar la curva correspondiente en el plano complejo tomando x como un parámetro. Siguiendo con el ejemplo anterior, la función

$$f = (\cos x, \sin x)$$

representaría la circunferencia de radio unidad.

Estas funciones son interesantes, pero no poseen propiedades que no conozcamos ya del análisis vectorial de funciones reales. Lo realmente interesante surge al considerar funciones complejas *de variable compleja*.

2.2. Funciones de variable compleja

Estas funciones son totalmente nuevas y dan lugar a resultados en muchos casos cualitativamente distintos a las funciones reales de variable real.

Definición. La aplicación $w = f(z)$ toma un conjunto de \mathbb{C} denominado **dominio** \mathcal{D} donde está definida y asocia cada uno de sus puntos a otro conjunto de \mathbb{C} llamado **imagen** o dominio imaginario:

$$f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

▷ EJEMPLO. Hallar el dominio de la función

$$f(z) = \frac{1}{z-i}$$

Como la división está definida siempre que el denominador sea distinto de cero, el dominio de f será todo \mathbb{C} salvo $z = i$, es decir, $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq i\}$.

De la misma forma en que expresamos $z = x + iy$ en términos de sus partes real e imaginaria, podemos descomponer análogamente una función f dada en su **forma cartesiana**:

$$f = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

Además, se define la **forma polar** como sigue:

$$f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

donde r y θ se introdujeron en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} r &= |z| \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \end{aligned}$$

Debido al isomorfismo entre \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 , la función $f = u + iv$ puede identificarse con el **mapeo** $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ de la misma manera que un número complejo $z = x + iy$ puede representarse mediante el vector (x, y) .

▷ EJEMPLO. Expresar $f(z) = z + z^{-1}$ en forma cartesiana y polar.

Reemplazamos z por $z = x + iy$ y simplificamos:

$$f = x + iy + \frac{1}{x + iy} = x + \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

Esta es la forma cartesiana. La forma polar se obtiene haciendo la sustitución $z = re^{i\theta}$ y aplicando la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} f &= re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{i}{r} \sin \theta \\ &= \underbrace{\frac{r^2 + 1}{r} \cos \theta}_{u(r,\theta)} + i \underbrace{\left(\frac{r^2 - 1}{r} \sin \theta\right)}_{v(r,\theta)} \end{aligned}$$

2.3. Límites

Definición. Una función $w = f(z)$ tiende al **límite** w_0 cuando z tiende a z_0 ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ para todo z cuando $0 < |z - z_0| < \delta$.

Esta definición no es muy útil desde el punto de vista operacional. Damos ahora tres teoremas sin demostración que nos van a ayudar en el cálculo de límites.

Teorema. Si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, entonces el límite es único

Teorema. Sea $f = u(x, y) + iv(x, y)$. Si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) &= u(x_0, y_0) = u_0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) &= v(x_0, y_0) = v_0 \end{aligned}$$

El recíproco también es cierto.

Teorema. Si existen $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f + g) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f + \lim_{z \rightarrow z_0} g \\ \lim_{z \rightarrow z_0} fg &= \lim_{z \rightarrow z_0} f \lim_{z \rightarrow z_0} g \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f}{g} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f}{\lim_{z \rightarrow z_0} g} \end{aligned}$$

Damos un ejemplo que ilustra las propiedades anteriores:

▷ EJEMPLO. Hallar el siguiente límite:

$$l = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/2}} \frac{z^4 - 1}{z - i}$$

Observamos que $e^{i\pi/2} = i$ y que, por tanto, el numerador y el denominador tienden los dos a cero. La forma de resolver esta indeterminación es mediante la factorización del numerador. Hemos de calcular las 4 raíces de $1^{1/4}$, que son, como ya vimos en el capítulo anterior, 1 , -1 , i y $-i$. Por tanto,

$$l = \lim_{z \rightarrow e^{i\pi/2}} \frac{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}{z-i} = 2i(1+i)(-1+i) = -4i$$

Una característica que hay que tener muy en cuenta es que en el plano \mathbb{C} existen varias formas de llegar a z_0 , a diferencia de lo que ocurre en la recta \mathbb{R} , donde sólo hay dos formas de alcanzar un punto dado (por ejemplo, para $x \rightarrow 0$ tenemos dos posibilidades, a saber, $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow 0^-$). En \mathbb{C} hay infinitas formas de llegar a un punto dado. Entonces, si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, éste no debe depender del camino elegido. Podemos utilizar esta estrategia para demostrar que un cierto límite no existe.

▷ EJEMPLO. Demostrar que

$$\ell = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{z}$$

no existe.

En coordenadas cartesianas, el límite se escribe

$$\ell = \lim_{(x,y) \rightarrow (0+i0)} \frac{x}{x+iy}$$

Debemos hacer tender $z = x + iy$ a $z_0 = 0 + i0$. Esto se puede hacer de muchas maneras. En cuanto encontremos dos formas que den resultados disímiles, habremos demostrado que ℓ no existe. Escojamos, primero, tender z a z_0 a lo largo del eje x . Esto quiere decir que dejamos x libre y fijamos la coordenada $y = 0$:

$$\ell = \lim_{(x,0) \rightarrow (0+i0)} \frac{x}{x+i0} = 1$$

Ahora repetimos el límite, pero a lo largo de la recta $y = x$:

$$\ell = \lim_{(x,x) \rightarrow (0+i0)} \frac{x}{x+ix} = \frac{1-i}{2}$$

Los dos límites son distintos y, por tanto, ℓ no existe. Para estar totalmente seguros, calculamos ahora ℓ a lo largo de eje y ($x = 0$):

$$\ell = \lim_{(0,y) \rightarrow (0+iy)} \frac{0}{0+iy} = 0$$

que vuelve a ser distinto de los anteriores.

Los límites que involucren al ∞ se tratan de manera similar al caso real.

2.4. Continuidad

Definición. Una función se dice que es **continua** en z_0 si y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Nótese que esta definición implica que tanto $\lim_{z \rightarrow z_0} f$ como $f(z_0)$ deben existir.

▷ EJEMPLO. Redefinir la función

$$f(z) = \frac{z^4 - 1}{z - i}$$

para que sea continua en $z = i$.

El punto $z = i$ no forma parte del dominio de f . Habíamos visto en un ejemplo anterior que

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\pi/2}} \frac{z^4 - 1}{z - i} = -4i$$

Por tanto, sólo nos hace falta exigir que $f(i) = -4i$:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^4 - 1}{z - i} & z \neq i \\ -4i & z = i \end{cases}$$

Se sigue de los teoremas de la sección anterior que la suma, el producto y el cociente de funciones continuas son también funciones continuas (excluyendo, por supuesto, denominadores nulos). Además, la composición de funciones continuas genera también funciones continuas. Finalmente, si $f = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua, entonces u y v son continuas.

2.5. Derivadas y ecuaciones de Cauchy-Riemann

Los resultados de las secciones anteriores nos resultan familiares del análisis real. En esta sección veremos el primer resultado genuinamente de \mathbb{C} y que no tiene similitud con ningún otro resultado que conozcamos en \mathbb{R} .

Definición. $f'(z_0)$ es la **derivada** de f en z_0 si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Ambas definiciones son equivalentes, pues $\Delta z = z - z_0$.

La existencia (o no) de $f'(z_0)$ y el cálculo de ésta pueden realizarse a partir de la definición anterior, pero quizá este método no es del todo conveniente en la mayoría de los ocasiones. Existe, sin embargo, un resultado extraordinariamente simple que nos aclara la existencia de la derivada de una función arbitraria $f(z)$.

Supongamos que existe la derivada de $f = u(x, y) + iv(x, y)$ en $z_0 = x_0 + iy_0$. Calculemos el límite de arriba a lo largo de la recta horizontal $y = y_0$ (es decir, fijamos y y hacemos tender x a x_0). Esto es lo mismo que hacer $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i0} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i0} \right] &= \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

donde hemos empleado la definición de derivada parcial.

Ahora consideramos el caso $\Delta y \rightarrow 0$ fijando $\Delta x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \\ \lim_{\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{0 + i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{0 + i\Delta y} \right] &= \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Ambos límites deben ser iguales, ya que hemos supuesto que $f'(z_0)$ existe. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Como ya hemos hecho otras veces, esta igualdad es cierta si son iguales las partes reales e imaginarias, lo que da dos condiciones: las célebres **ecuaciones de Cauchy-Riemann**:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Estas ecuaciones constituyen una condición *necesaria* para que $f'(z_0)$ exista.

▷ EJEMPLO. Sea $f(z) = |z|^2$. Indicar si $f'(z)$ existe.

Aplicando el resultado anterior, sólo podemos decir cuándo $f'(z)$ *no* existe, que ocurrirá cuando las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfagan. Vamos, pues, a encontrar la descomposición $f = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$f = |(x + iy)|^2 = x^2 + y^2$$

Por tanto, tenemos que

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, está claro que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen en ningún punto salvo en $z = 0$. Por tanto, f no es derivable en ningún punto salvo, quizá, en $z = 0$.

Lo realmente notable es que las ecuaciones de Cauchy-Riemann forman también una condición *suficiente* si las derivadas parciales de u y v existen y son continuas. Este resultado es tan crucial que lo descaremos en el siguiente teorema:

Teorema. Sea $f = u(x, y) + iv(x, y)$ definida en un entorno alrededor de z_0 . Si $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ son continuas en ese entorno y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $f'(z_0)$ existe.

Hay dos razones para la importancia del teorema anterior: (i) nos dice sin ambigüedad cuándo una función es derivable y (ii) nos proporciona un método para calcular la derivada:

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

o bien

$$f' = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ambas formas son equivalentes gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Si la función f viene dada en forma polar, $f = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial r}\end{aligned}$$

mientras que la derivada de f viene dada por

$$f' = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

Ahora estamos en posición de abordar la pregunta que dejamos sin responder en el ejemplo anterior:

▷ EJEMPLO. Determinar si $f(z = x + iy) = x^2 + y^2 + i0$ es derivable en $z = 0$.

Las derivadas parciales $u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = v_y = 0$ son continuas en $z = 0 + i0$ y cumplen trivialmente las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Luego f es derivable en $z = 0$.

Nótese que hemos construido de forma muy sencilla una función que es continua en todo \mathbb{C} (pues las funciones u y v lo son), pero que es derivable solamente en un punto. Tales funciones serían muy difíciles de hallar en \mathbb{R} .

La conclusión que sacamos de la discusión anterior es que si $f(z)$ es continua, esto *no* implica que sea derivable. Ahora bien, si resulta que $f(z)$ es derivable, entonces automáticamente es continua. Esta afirmación es análoga a lo que ocurre en análisis de funciones reales.

No obstante, las funciones realmente interesantes son las que son derivables en un punto y en *todos* los puntos pertenecientes a un entorno alrededor de él:

Definición. $f(z)$ se denomina **analítica** u **holomorfa** si existe f' en $z = z_0$ y en todos los puntos de un entorno alrededor de z_0 .

En realidad, la importancia de las funciones analíticas es tal que uno puede llegar a decir que el análisis de funciones complejas se reduce básicamente al estudio de las funciones analíticas. Nótese que la condición que exigimos es fuerte. No sólo pedimos que f sea derivable en un punto sino también en una región finita alrededor de él. Esto va a dar lugar a resultados muy bellos y de gran alcance, pero no sólo en matemáticas, pues el estudio de las regiones de analiticidad de una función dada es fundamental en muchas áreas de la física.

- ▷ EJEMPLO. Determinar si la función $f(z) = |z|^2$ es analítica en algún punto. Siguiendo con los ejemplos anteriores, deducimos que $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún punto, aunque sea derivable en $z_0 = 0$ ya que no existe ningún entorno alrededor de z_0 , por pequeño que sea, en el que f sea derivable por completo.

Definición. $f(z)$ es **entera** si es analítica en todo el plano complejo.

Definición. z_0 es un **punto singular** o **singularidad** de $f(z)$ si f no es analítica en $z = z_0$.

Buena parte del curso se basará en hallar las regiones de analiticidad de una función en concreto y en estudiar la naturaleza de sus singularidades.

- ▷ EJEMPLO. Sea

$$f(x + iy) = \underbrace{x^3 + 3xy^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{(y^3 + 3x^2y)}_{v(x,y)}$$

Determinar para qué puntos o regiones del plano existe f' , hallar f' allá donde exista y discutir las regiones de analiticidad.

A partir la expresión anterior, calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_x &= 3x^2 + 3y^2 & v_x &= 6xy \\ u_y &= 6xy & v_y &= 3y^2 + 3x^2 \end{aligned}$$

que son continuas en todo \mathbb{C} . Una de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisface, $u_x = v_y$, pero la otra no: $u_y \neq -v_x$ salvo en $z = 0 + iy$ (eje imaginario) y $z = x + i0$ (eje real). Luego concluimos que f es derivable únicamente en las rectas $x = 0$ e $y = 0$. Para hallar su derivada, evaluamos la expresión

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 + i6xy$$

que tenemos que particularizar para los casos $x = 0$ ó $y = 0$:

$$f' = \begin{cases} 3y^2 & \text{si } x = 0 \\ 3x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Finalmente, f no es analítica en ningún punto ya que, si tomamos un punto donde es derivable, no podemos encontrar ninguna región \mathcal{D} en el plano donde exista $f'(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$.

▷ EJEMPLO. Sea $f(r, \theta) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$. Hallar las regiones de analiticidad de f .

Aplicamos la fórmula de Euler:

$$f(r, \theta) = \underbrace{\frac{1}{r} \cos \theta}_{u(r, \theta)} + i \underbrace{\frac{-1}{r} \operatorname{sen} \theta}_{v(r, \theta)}$$

y calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{-\cos \theta}{r^2} & u_\theta &= \frac{-\operatorname{sen} \theta}{r} \\ v_r &= \frac{-\cos \theta}{r} & v_\theta &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^2} \end{aligned}$$

que son continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar escritas más arriba excepto en el punto $r = 0$, que corresponde a $z = 0$ (el origen). En consecuencia, $f(r, \theta)$ es derivable y analítica en todo el plano salvo en el origen, que es un punto singular.

Nótese que, como $z = re^{i\theta}$, la función en términos de la variable z es simplemente

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

que es claramente continua y derivable para todo $z \neq 0$. Siguiendo las reglas usuales de derivación, la derivada es:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}$$

que está definida para todo $z \neq 0$.

2.6. Funciones armónicas

La importancia práctica de las funciones analíticas se pone de manifiesto en el siguiente teorema:

Teorema. Sea $f = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica. Entonces, las funciones u y v son **armónicas**; es decir, cada una, por separado, cumple la ecuación de Laplace:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

Demostración. Como f es analítica, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La primera establece que $u_x = v_y$. Derivamos con respecto a y : $u_{yx} = v_{yy}$. Ahora aplicamos la segunda ecuación de Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$, y derivamos con respecto a x : $u_{xy} = -v_{xx}$. Como las derivadas cruzadas deben ser iguales, concluimos que $v_{xx} + v_{yy} = 0$. La ecuación para u se demuestra de forma similar. \square

La ecuación de Laplace aparece en innumerables problemas físicos. Más adelante profundizaremos en la relación entre las funciones analíticas y la ecuación de Laplace. Por el momento, vamos a familiarizarnos con este resultado mediante un par de ejemplos que vienen a continuación de la siguiente definición:

Definición. Se dice que $v(x, y)$ es **armónica conjugada** de $u(x, y)$ si u y v son ambas armónicas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Entonces, si v es armónica conjugada de u , $f = u + iv$ es analítica en \mathcal{D} . Esta afirmación es la inversa del teorema anterior.

- ▷ EJEMPLO. Demostrar que $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ es una función armónica y hallar su armónica conjugada $v(x, y)$ tal que la función $f = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica.

Como $u_{xx} = -6x$ y $u_{yy} = 6x$, tenemos que $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Para calcular su armónica conjugada, hemos de hallar una función $v(x, y)$ que, junto con u , satisfagan ambas las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La primera nos dice que

$$u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 = v_y$$

Luego integrando la expresión anterior sobre y obtenemos:

$$v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + \phi(x)$$

donde $\phi(x)$ es una función arbitraria de x (es la «constante» de integración que resulta al integrar sobre y). Por otro lado, aplicamos la segunda ecuación de Cauchy-Riemann:

$$u_y = 6xy = -v_x$$

e integramos ahora sobre x :

$$v(x, y) = -3x^2y + \psi(y)$$

donde $\psi(y)$ es una función arbitraria de y . Comparando las dos expresiones que obtenemos para $v(x, y)$ deducimos que $\phi(x) = 0$ y $\psi(y) = 2y + y^3$. Por tanto, la armónica conjugada deseada es

$$v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$$

Es inmediato ver que v cumple la ecuación de Laplace. Además, $f = u + iv$ es forzosamente analítica, pues hemos impuesto que u y v cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las derivadas parciales son claramente continuas.

▷ EJEMPLO. Sea $f = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica. Supongamos que $u(x, y) = e^x \cos y$. Hallar su armónica conjugada $v(x, y)$.

La función u cumple la ecuación de Laplace. Utilizamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} u_x = e^x \cos y = v_y &\implies v(x, y) = e^x \sin y + \phi(x) \\ u_y = -e^x \sin y = -v_x &\implies v(x, y) = e^x \sin y + \psi(y) \end{aligned}$$

Por tanto, $\phi(x) = \psi(y) = 0$ y $v(x, y) = e^x \sin y$.

El ejemplo anterior ilustra la importancia del siguiente resultado: si conocemos una función armónica $u(x, y)$, entonces siempre se puede hallar una función analítica $f(z)$ tal que $\operatorname{Re} f = u$. Dicho con otras palabras: a partir de la parte real de una función analítica podemos calcular, sin conocerla, su parte imaginaria. Esta observación tiene fuertes implicaciones con el principio de causalidad en física cuando f es la función respuesta de un sistema dado. Veremos esto con más detalle en el capítulo 4.

2.7. Formulación alternativa

En el capítulo 1 se vio que las partes real e imaginaria de un número complejo $z = x + iy$ pueden escribirse en función de z y su conjugado z^* :

$$\begin{aligned} x &= \frac{z + z^*}{2} \\ y &= \frac{z - z^*}{2i} \end{aligned}$$

Esto sugiere que una función $f(x, y)$ puede expresarse como una función de z y z^* utilizando las sustituciones anteriores:

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right)$$

Por supuesto, esto sólo es una manera informal de expresar f ya que z y z^* no son variables independientes a diferencia de x e y . Pero supongamos por un momento que lo son y veamos adónde nos lleva este planteamiento.

Calculemos la derivada de f con respecto a la nueva variable z^* utilizando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Ahora bien, si se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, los dos términos que están entre paréntesis se anulan y tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

es decir, *una función es analítica si y sólo si es independiente de z^** . Ésta es una formulación alternativa de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. La desventaja que tiene es que si nos dan una expresión complicada de $f(z, z^*)$ y queremos saber si es analítica, puede ocurrir que la simplificación de f no sea trivial a simple vista, y haya que realizar muchos pasos antes de eliminar z^* . Aun así, esta formulación pone de manifiesto que cualquier función compleja puede expresarse en términos de z y z^* , pero sólo las analíticas son independientes de z^* . En el ejemplo de la página 53 la función $f(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(2y - 3x^2y + y^3)$ es, en realidad, $f(z) = 2z - z^3$, verificándose la independencia del conjugado de z .

Finalmente, si f está dada en términos de z únicamente y f es derivable, podemos hallar f' simplemente siguiendo las reglas usuales de derivación tomadas del análisis real. Incidentalmente, esto implica que la **regla de l'Hôpital** para calcular límites también es válida para funciones complejas cuando éstas vengan expresadas en términos de la variable z .

▷ EJEMPLO. Expresar las funciones analíticas de los ejemplos de la sección anterior únicamente en términos de la variable z y calcular f' .

1. $f(x, y) = (2x - x^3 + 3xy^2) + i(2y - 3x^2y + y^3)$. Se sustituyen x e y por sus expresiones en función de z y z^* . Tras simplificar, encontramos que la función f depende sólo de la variable z :

$$f(z) = 2z - z^3$$

Luego se tiene simplemente que $f'(z) = 2 - 3z^2$.

2. $f(x, y) = (e^x \cos y) + i(e^x \operatorname{sen} y)$. Utilizando la fórmula de Euler, reducimos la expresión $(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ a e^{iy} . En consecuencia,

$$f = e^x e^{iy} = e^z$$

y la derivada es $f'(z) = e^z$. Estudiaremos la función exponencial compleja en el siguiente capítulo.

2.8. Aplicación: Campos y fluidos

Una aplicación inmediata de las funciones analíticas se refiere a los campos vectoriales que describen el flujo de un fluido ideal, el transporte de calor o el campo electrostático en dos dimensiones.

Consideremos un fluido bidimensional cuya velocidad en cada punto (x, y) se describe mediante el vector $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$, siendo u y v las componentes del vector velocidad a lo largo del eje horizontal y vertical, respectivamente. Asignemos \vec{V} a la función compleja $f = u + iv$, cuyas partes real e imaginaria corresponden, respectivamente, a las componentes u y v del vector velocidad. Supongamos que el fluido es **irrotacional**, es decir, que no tiene remolinos. Matemáticamente, esto implica que $\nabla \times \vec{V} = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(Las otras componentes del rotacional no las escribimos, pues dependen de la tercera componente espacial, y estamos suponiendo que el fluido es bidimensional).

Supongamos, además, que el fluido es **incompresible**, esto es, que el fluido no sufre compresiones ni expansiones. Entonces, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, lo cual implica la siguiente condición:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

El lector se habrá dado cuenta en seguida de que las dos ecuaciones de arriba se parecen mucho a las de Cauchy-Riemann que hemos analizado todo este capítulo. Para que sean exactamente las mismas ecuaciones, consideremos la función $g = \tilde{u} + i\tilde{v}$ y hagamos $\tilde{u} = u$ y $\tilde{v} = -v$. Entonces, las ecuaciones de antes toman la forma deseada:

$$\tilde{u}_x = \tilde{v}_y, \quad \tilde{u}_y = -\tilde{v}_x$$

Claramente, g es analítica y es la compleja conjugada de la función velocidad, $g = f^*$.

En electrostática el papel de la velocidad lo desempeña el campo eléctrico $\vec{E} \rightarrow f$, cuyas componentes se especificarán más tarde. Si $\nabla \times \vec{E} = 0$, se dice

entonces que \vec{E} es **conservativo**, y \vec{E} puede derivarse del gradiente de una función potencial, como veremos a continuación. En las regiones del espacio donde no haya cargas libres, el campo eléctrico cumple, además, la ecuación $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, que es formalmente idéntica a la ecuación anterior para fluidos incompresibles. De aquí la similitud entre ciertos problemas mecánica de fluidos y de electrostática y cómo el cálculo de funciones analíticas es una herramienta extraordinariamente útil en ambos campos.

Antes de ver un ejemplo, avancemos un resultado que se demostrará en el capítulo 4. Puesto que g es analítica, siempre se puede encontrar una función analítica $G(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ que sea la *primitiva* de g , $G'(z) = g(z)$, y que sea, a su vez, analítica. Podemos, entonces, escribir el gradiente de ϕ como:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x, y) &= \phi_x + i\phi_y \\ &= \phi_x - i\psi_x\end{aligned}$$

En la primera ecuación hemos escrito las componentes del gradiente, $\nabla\phi(x, y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$, como las partes real e imaginaria de una función compleja mientras que en la segunda igualdad hemos aplicado la segunda ecuación de Cauchy-Riemann ($\phi_y = -\psi_x$). Ahora bien, aplicando la definición de derivada se tiene que

$$\phi_x - i\psi_x = [G'(z)]^*$$

Debido a que $G'(z) = g(z)$ y $g = f^*$, inferimos que $f = \phi_x + i\phi_y$ y que, por tanto, el gradiente de ϕ es igual al campo vectorial:

$$\nabla\phi(x, y) = \vec{E}$$

Por eso, $\phi(x, y)$ es el **potencial** escalar del campo \vec{E} y las curvas $\phi(x, y) = C$, donde C es una constante, se denominen **equipotenciales**. El movimiento de una carga a lo largo de una curva equipotencial no requiere trabajo asociado. Por otro lado, las curvas $\psi(x, y) = C$ reciben el nombre de **líneas de flujo** y marcan el camino que recorre una carga inmersa en el campo \vec{E} . Es interesante ver que los dos conjuntos de curvas son perpendiculares entre sí puesto que la trayectoria de la partícula es paralela a la fuerza que se ejerce sobre ella, que es proporcional al campo. Como el gradiente apunta en la dirección en la que el $\phi(x, y)$ crece más rápidamente, entonces es perpendicular a las curvas equipotenciales. Este análisis también es válido para el campo gravitatorio en dos dimensiones.

Llegamos en este momento a una consecuencia sorprendente. Puesto que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y $\nabla\phi(x, y) = \vec{E}$, se concluye que *todo* problema electrostático es solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi = 0$$

En consecuencia, está garantizado que cualquier función analítica $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ que construyamos es solución directa de *algún* problema electrostático. ¡Aquí se da la paradoja de que disponemos de la solución de un problema siquiera antes de conocer el enunciado del mismo!

- ▷ EJEMPLO. Sea $G(z) = z^{1/2}$. Indicar las regiones de analiticidad y derivar un campo conservativo asociado a la función de potencial $\phi(x, y) = \operatorname{Re} G$.

Como se trata de una raíz, trabajamos en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$:

$$G(r, \theta) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} = \underbrace{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}}_{\phi(r, \theta)} + i \underbrace{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}}_{\psi(r, \theta)}$$

Para simplificar, nos quedamos sólo con la raíz principal. La función G es continua en todo \mathbb{C} salvo en el semieje real negativo, donde tiene una discontinuidad: $G(r, \theta = \pi) = i\sqrt{r}$, pero $G(r, \theta = -\pi) = -i\sqrt{r}$. Por tanto, restringimos el dominio \mathcal{D} de G al intervalo abierto $-\pi < \theta < \pi$.

Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \phi_r &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} & \psi_r &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \phi_\theta &= -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \psi_\theta &= \frac{\sqrt{r}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

que son continuas en $r \neq 0$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por tanto, G es analítica en todo \mathbb{C} salvo en el semieje $x \leq 0$.

En términos de las coordenadas x e y las funciones potencial y de líneas de flujo toman la forma

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \\ \psi(x, y) &= \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \end{aligned}$$

Las curvas equipotenciales $\phi = C$ son parábolas con eje a lo largo del eje x mientras que las líneas de flujo $\psi = C$ describen parábolas con idéntico eje, pero concavidad opuesta. Como se ve, ambas familias de curvas son ortogonales entre sí.

El campo conservativo puede derivarse directamente del gradiente de ϕ o utilizando el hecho de que

$$f(z) = [G'(z)]^* = \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{i\theta/2}$$

Por tanto,

$$\vec{E} = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

que corresponde al campo eléctrico que se forma cerca del borde de una placa uniformemente cargada.

2.9. Problemas resueltos

- PROBLEMA. Sea $u(x, y) = -x^2 - ax^2y + y^2 + y^3$ donde a es una constante.
- (a) Hallar a para que u sea armónica y encontrar su armónica conjugada $v(x, y)$.
- (b) Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con las funciones u y v encontradas en el apartado anterior. Dar el dominio de analiticidad de f y calcular f' en el punto $z = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$.

Solución. (a) Imponiendo $u_{xx} + u_{yy} = 0$, se obtiene $a = 3$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann llevan a la siguiente expresión para la armónica conjugada de u :

$$v(x, y) = x^3 - 2xy - 3xy^2$$

(b) Como u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, f es analítica en todo \mathbb{C} y su derivada es

$$f' = (-2x - 6xy) + i(3x^2 - 2y - 3y^2)$$

El punto $z = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ en coordenadas rectangulares toma la forma $z = -1 - i$. Luego sustituimos $x = -1$ e $y = -1$ en la expresión anterior y encontramos que $f(\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}) = -4 + 2i$.

- PROBLEMA. Sea

$$f(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + i2axy$$

donde a es una constante real. Hallar a para que f sea analítica en \mathbb{C} y expresar f únicamente en términos de la variable compleja z .

Solución. Imponiendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se obtiene inmediatamente que $a = 3$. A continuación, sustituimos las relaciones $x = (z + z^*)/2$ e $y = (z - z^*)/(2i)$:

$$f(z) = 3 \left(\frac{z + z^*}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{z - z^*}{2i} \right)^2 + 6i \frac{z + z^*}{2} \frac{z - z^*}{2i} = 3z^2$$

Como habíamos impuesto que f fuera analítica, la función resulta ser independiente de z^* .

□ PROBLEMA. Sea $\operatorname{Re} f = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. Hallar su armónica conjugada

Solución. Nos están proporcionando la función $u(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. La función v tal que $f = u + iv$ sea analítica será su armónica conjugada. Impongamos las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}u_x &= \cos x \operatorname{senh} y = v_y \\u_y &= \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y = -v_x\end{aligned}$$

Integrando la primera ecuación hallamos $v(x, y) = -\cos x \operatorname{cosh} y + \phi(x)$. Integrando ahora la segunda ecuación vemos que $v(x, y) = \cos x \operatorname{cosh} y + \psi(y)$. Las dos expresiones son iguales si y sólo si $\phi(x)$ y $\psi(y)$ equivalen ambas a una constante, que tomamos igual a cero. De ahí que la armónica conjugada de $\operatorname{Re} f$ sea $\operatorname{Im} f = \cos x \operatorname{cosh} y$. Además, f es analítica.

□ PROBLEMA. Sea $f(z) = \arg(e^{iz})$. Determinar la cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- A. f es analítica para todo z tal que $\operatorname{Im} z = 0$.
- B. f es entera.
- C. f es derivable en $z = 0$.
- D. f no es derivable.

Solución. Se trata de estudiar las condiciones de diferenciabilidad de f . Sustituyendo la forma cartesiana $z = x + iy$, obtenemos $f(z) = \arg(e^{-y} e^{ix}) = x$. Por tanto, $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = 0$. Observamos que estas funciones no verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Por consiguiente, f no es derivable en ningún punto y la respuesta D es la correcta.

2.10. Ejercicios

1. Analizar el dominio de derivabilidad y analiticidad de las siguientes funciones y calcular la derivada cuando sea posible.

a) $f(x, y) = x^2 + i(y^2 - 4)$

b) $f(z) = \frac{z-1}{z(z^2+1)}$

- c) $f(z) = \arg(z)$
 d) $f(x, y) = x + y + i(ax + by)$
 e) $f(z) = z + z^*$
 f) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$

2. Demostrar que $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ es una función armónica y hallar su armónica conjugada.
 3. Construir una función analítica $f(z)$ tal que $\operatorname{Re}(f') = (x^2 - y^2) - 2y$ y $f(i) = 1$.
 4. Demostrar que las siguientes expresiones son equivalentes a las derivadas de la página 49 para calcular f' :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

5. Averiguar si los siguientes campos vectoriales son conservativos y sin divergencia. Cuando sea posible, trazar esquemáticamente las curvas equipotenciales y las líneas de flujo.

- a) $\vec{E} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$
 b) $\vec{E} = (2x, -2y)$

2.11. Nota histórica

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemán, pionero en muy diversos campos. Ya en sus tesis doctoral aparece por primera vez la relación entre las funciones analíticas y la ecuación de Laplace (véase la página 52). Después del trabajo de Cauchy, fue él quien dio otro gran impulso al análisis complejo al descubrir la conexión entre las funciones complejas multivaluadas (véase el capítulo 3) y la topología.



Funciones elementales

UNA VEZ DESCRITAS las propiedades fundamentales de las funciones complejas en general, nos ocupamos en este capítulo de estudiar funciones concretas que nos resultan conocidas del análisis real. Obtendremos resultados singulares: la función exponencial compleja se vuelve periódica, el seno y el coseno dejan de ser funciones acotadas y el logaritmo admite argumentos negativos. Avanzaremos el concepto de rama de una función multivaluada y daremos un repaso rápido a las inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

3.1. Polinomios

Los polinomios no presentan ninguna dificultad. La función polinómica

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

de grado n es continua y analítica en todo \mathbb{C} (es una función entera). En general, los coeficientes a_i ($i = 1, \dots, n$) son números complejos.

El cociente de dos polinomios, $\frac{p(z)}{q(z)}$, es también continuo y derivable en todos los puntos que cumplan $q(z) \neq 0$.

3.2. Función exponencial

La función se define a partir de la fórmula de Euler. Sabemos que

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Por tanto, para $z = x + iy$ podemos definir la función exponencial *compleja* e^z de la siguiente forma:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

La función exponencial es entera y su derivada es la propia exponencial: $(e^z)' = e^z$. Muchas de sus propiedades son análogas a la función exponencial real:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
2. $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$
3. $(e^z)^n = e^{nz}$, $n \in \mathbb{N}$
4. $e^{\bar{z}} = (e^z)^*$
5. $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

La última propiedad es la que marca una diferencia fundamental con respecto a la exponencial real: la exponencial compleja es una función *periódica*, y su periodo, imaginario puro, vale $2\pi i$.

De la definición extraemos el módulo y el argumento:

$$|e^z| = e^x, \quad \arg(e^z) = y + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

▷ EJEMPLO. Calcular todas las soluciones de la siguiente ecuación:

$$e^z = i$$

Aplicamos la definición de la función exponencial:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

donde hemos escrito i en forma exponencial. Comparando los dos miembros de la ecuación, concluimos que $x = 0$ e $y = \pi/2 + 2n\pi$. Por tanto, la solución es:

$$z = i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.3. Funciones trigonométricas

Recordemos que en el capítulo 1 dedujimos expresiones para las funciones seno y coseno en términos de la función exponencial:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Para definir las funciones seno y coseno complejas, simplemente sustituimos la variable real x por la variable compleja z :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \operatorname{cos} z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\end{aligned}$$

donde ahora las funciones exponenciales son complejas y cuyas propiedades se desarrollaron en el apartado anterior.

¿Siguen siendo válidas las relaciones trigonométricas usuales tras el inocente cambio $x \rightarrow z$? Demostremos que la más conocida, $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$, se cumple también en \mathbb{C} :

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} = 1$$

Sustituyamos ahora z por $x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, $\operatorname{sen}(z)$ pasa a ser $\operatorname{sen}(x + iy)$ y podemos utilizar la conocida relación para el ángulo suma:

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} iy + \operatorname{cos} x \operatorname{sen} iy$$

Con las funciones $\operatorname{sen} x$ o $\operatorname{cos} x$ no tenemos problema, pero ¿cuál es el significado de $\operatorname{sen}(iy)$ o $\operatorname{cos}(iy)$? El seno o el coseno de un ángulo imaginario puro *tienen* sentido, pues no hace falta más que sustituir en la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} iy &= \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \operatorname{senh} y \\ \operatorname{cos} iy &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{cosh} y\end{aligned}$$

donde senh y cosh son, respectivamente, las funciones *reales* del seno y coseno hiperbólicos. Estas relaciones las vamos a utilizar en más de una ocasión.

Así pues, la forma cartesiana de la función $\operatorname{sen} z$ reza

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y + i \operatorname{cos} x \operatorname{senh} y$$

de donde se infiere que $u(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y$ y $v(x, y) = \operatorname{cos} x \operatorname{senh} y$.

Tanto el seno como el coseno siguen siendo funciones periódicas de periodo 2π :

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \operatorname{sen} z$$

Aquí hemos aplicado el hecho de que la exponencial compleja posee periodo $2\pi i$.

▷ EJEMPLO. Resolver la ecuación $\cos z = 2$.

Obviamente, si z fuera real, la ecuación no tendría solución, pues el coseno real está acotado entre -1 y 1 . Pero esto no tiene por qué ser cierto en \mathbb{C} . Empleamos la definición de $\cos z$:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4$$

Introducimos ahora la variable $w \equiv e^{iz}$:

$$w + \frac{1}{w} = 4 \implies w^2 - 4w + 1 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática son $w = (2 \pm \sqrt{3})e^{2in\pi}$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Escribimos $z = x + iy$ y hallamos x e y :

$$w = e^{iz} \implies (2 \pm \sqrt{3})e^{2in\pi} = e^{ix}e^{-y}$$

Comparamos ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} 2 \pm \sqrt{3} = e^{-y} &\implies y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \\ e^{2in\pi} = e^{ix} &\implies x = 2n\pi \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$z = 2n\pi - i \ln(2 + \sqrt{3})$$

y

$$z = 2n\pi - i \ln(2 - \sqrt{3})$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

En el ejemplo anterior hemos hallado un «ángulo» complejo z tal que $\cos z > 1$. ¿Esto implica que $\cos z$ no está acotado? Podemos utilizar las relaciones del ángulo suma para hallar el módulo de las funciones seno y coseno:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z|^2 &= (\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y)(\operatorname{sen} x \cosh y - i \cos x \operatorname{senh} y) \\ &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x (1 + \operatorname{senh}^2 y) + (1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

Ahora bien, la función $\operatorname{sen}^2 x$ está acotada, pero $\operatorname{senh}^2 y$ no lo está. Luego $\operatorname{sen} z$ no está acotada. Un razonamiento similar conduce a la siguiente expresión:

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

Luego $\cos z$ tampoco está acotada.

Por último, es evidente que tanto $\operatorname{sen} z$ como $\operatorname{cos} z$ son funciones analíticas. La función tangente,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$$

también es analítica para todo z que verifique $\operatorname{cos} z \neq 0$.

3.4. Funciones hiperbólicas

Ya hemos visto la importancia de las funciones hiperbólicas reales en las funciones trigonométricas complejas. De ahí la motivación para extender el dominio de definición introduciendo el seno hiperbólico el y el coseno hiperbólico *complejos*:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

respectivamente.

Enumeramos a continuación sus propiedades más relevantes:

1. $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
2. $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$
 $\operatorname{cosh}(-z) = \operatorname{cosh} z$
3. $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \operatorname{cosh} x \operatorname{sen} y$
 $\operatorname{cosh} z = \operatorname{cosh}(x + iy) = \operatorname{cosh} x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$
4. $\operatorname{senh}(z + 2\pi i) = \operatorname{senh} z$
5. $\operatorname{senh} z = 0 \iff z = n\pi i$
 $\operatorname{cosh} z = 0 \iff z = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi i$

Muchas de las propiedades que aparecen en la lista de arriba son análogas a las que verifican las funciones hiperbólicas en \mathbb{R} . Una excepción notable es que $\operatorname{senh} z$ y $\operatorname{cosh} z$ son periódicas en \mathbb{C} , y el periodo es $2\pi i$. Asimismo, $\operatorname{cosh} z$ tiene infinitos ceros en \mathbb{C} mientras que en \mathbb{R} se tiene que $\operatorname{cosh} x \geq 1$ y, por tanto, $\operatorname{cosh} x$ no tiene ningún cero en \mathbb{R} .

▷ EJEMPLO. Resolver la ecuación $\operatorname{cosh} z = -1$.

Si z fuera real, la ecuación anterior no tendría solución posible. Ahora vamos a demostrar que en \mathbb{C} sí que hay solución. Al igual que en el ejemplo del apartado anterior, consideramos la variable $w = e^z$ y sustituimos en la definición de $\cosh z$:

$$\frac{w + w^{-1}}{2} = -1 \implies w^2 + 2w + 1 = 0$$

La única solución de la ecuación cuadrática es $w = -1$. Ahora bien, para encontrar z , hemos de tomar el logaritmo de -1 . En \mathbb{R} sabemos que eso no es posible, aunque en \mathbb{C} es perfectamente válido. No obstante, posponemos a la sección siguiente la explicación del procedimiento y proponemos ahora una estrategia diferente: hagamos $z = x + iy$ y apliquemos la fórmula del ángulo suma:

$$\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = -1 + i0$$

Igualando partes reales e imaginarias, se deduce inmediatamente que $x = 0$ e $y = n\pi$ con $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$. Por tanto, la solución a la ecuación es $z = in\pi$ siendo n impar.

3.5. Logaritmo

La función compleja que quizá más se aleja de su análoga en \mathbb{R} es la función logaritmo: $\ln z$. Como e^z es una función periódica tal que $e^z = e^{z+2\pi i}$, es imposible definir una operación inversa que sea unívoca. Para ver las consecuencias a la que esta observación nos aboca, escribamos $\ln z$ con z expresado en forma polar:

$$\ln z = \ln(|z|e^{i\theta}) = \ln|z| + i(\text{Arg } z + 2\pi n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

siendo $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$. Se sigue de la ecuación anterior que $\ln z$ es **multivaluada**, es decir, que dado un valor de z existen *infinitos* valores de $\ln z$. Por ejemplo, es conocido que $\ln 1 = 0$ en \mathbb{R} , pero en \mathbb{C} tenemos la igualdad $1 = e^{2\pi in}$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Luego $\ln 1 = 2\pi in$.

La propiedad de antes no es que sea mala. Al contrario, nos permite extender el dominio de $\ln z$ a regiones anteriormente prohibidas en \mathbb{R} . Verbigracia, nos permite calcular logaritmos de números negativos. En efecto, considérese $z = -1$. Hallamos su módulo y fase: $|z| = 1$ y $\theta = (2n + 1)\pi$ donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Entonces:

$$\ln(-1) = (2n + 1)\pi i \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

El caso $n = 0$ es especial y recibe el nombre de **valor principal**. Por tanto, el valor principal de $\ln(-1)$ es πi . Con todo, hay dos formas de acercarse a $z = -1$. Por arriba, se cumple que $\theta \rightarrow \pi$, obteniéndose el valor de antes, $\ln(-1) = i\pi$,

mientras que por debajo hay que tomar el límite $\theta \rightarrow -\pi$, de donde se deriva $\ln(-1) = -i\pi$. En consecuencia, $\ln z$ es *discontinua* en la determinación principal ($-\pi < \theta \leq \pi$). Por ello, es conveniente acotar el dominio a $-\pi < \theta < \pi$ donde $\ln z$ es continua y analítica excepto en $z = 0$.

Definición. Se denomina **rama** de una función $f(z)$ multivaluada a una $g(z)$ analítica en un dominio \mathcal{D} en el que $g(z) = f(z)$.

En el caso anterior, el dominio $\mathcal{D} : \{-\pi < \theta < \pi\}$ contiene la rama $g(z) = \ln|z| + i\theta$ de $f(z) = \ln z$ en donde g es analítica. Esta es la rama principal.

Definición. Se denomina **corte ramal**, **corte de rama** o **corte de ramificación** al conjunto de puntos singulares que surgen al definir una rama de $f(z)$.

En el ejemplo anterior, el corte ramal es el semieje real negativo $\theta = \pi$. Otro corte ramal puede ser $\theta = 3\pi$. En general, $\ln z$ posee infinitos cortes ramales porque está multivaluada.

Definición. Se denomina **punto de rama** o **punto de ramificación** al punto singular común a todas las ramas.

En el ejemplo anterior, el punto singular común a las ramas $\theta = \pi, 3\pi, \dots$ es $z = 0$.

Enumeramos ahora las propiedades más notables de $\ln z$:

1. $e^{\ln z} = z$
2. En general, se tiene que $\ln e^z \neq z$ ya que $\ln e^z = \ln \left[e^x e^{i(y+2n\pi)} \right] = \ln e^x + i(y+2n\pi) = z + 2n\pi i$.
3. $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, pero, en general, esta relación no se satisface si tomamos valores principales.
4. $\ln z^n \neq n \ln z$
5. $\ln z^{1/n} = \frac{1}{n} \ln z$
6. $\ln z$ no es derivable, pues no es analítica. Sin embargo, el valor o rama principal del $\ln z$ sí que lo es, y su derivada es

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

De especial relevancia son las propiedades 4 y 5. Para demostrar la propiedad 4, basta con encontrar un contraejemplo de la igualdad $\ln z^n = n \ln z$. Tomemos $n = 2$ y $z = -1 + i$. Primero, calculamos $\ln z^2$:

$$\ln(-1 + i)^2 = \ln(-2i) = \ln 2 + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Después, calculamos $2 \ln z$:

$$2 \ln(-1 + i) = 2 \left[\ln \sqrt{2} + i \left(\frac{3\pi}{4} + 2m\pi \right) \right] = \ln 2 + i \left(\frac{3\pi}{2} + 4m\pi \right), \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Pero $-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ no equivale a $\frac{3\pi}{2} + 4m\pi$. Por ejemplo, para $n = 0$ tenemos que $\operatorname{Im} \ln(-2i) = -\pi/2$, un valor que no se puede obtener nunca a partir de la expresión $\frac{3\pi}{2} + 4m\pi$ para ningún valor m que escojamos.

La igualdad 5 se debe entender del siguiente modo: el conjunto de valores de $\ln z^{1/n}$ coincide con el de $\frac{1}{n} \ln z$. Dejamos al lector que corrobore esta afirmación en el caso particular de $n = 2$ y $z = -1 + i$.

3.6. Exponentes complejos

En el capítulo 1 habíamos mostrado la forma de calcular potencias de números complejos elevados a números enteros o fraccionarios. Ahora ha llegado el momento de extender esta operación a exponentes complejos (que, por supuesto, incluyen todos los reales).

Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Definimos z^w como sigue:

$$z^w = e^{w \ln z}$$

donde $\ln z$ es la función logaritmo multivaluada. Por supuesto, esta definición reproduce los resultados ya conocidos cuando $w \in \mathbb{Z}$ o w es una raíz del tipo $1/n$.

He aquí las propiedades más sobresalientes:

1. $\frac{1}{z^w} = z^{-w}$.
2. En general, $(z_1 z_2)^w \neq z_1^w z_2^w$.
3. $f(z) = z^w$ es monovaluada y analítica si tomamos una determinación del $\ln z$. Se denomina **valor principal** de z^w al caso en que tomamos la rama principal de $\ln z$.
4. $\frac{d}{dz} z^w = w z^{w-1}$ si tomamos una determinación en concreto.

El ejemplo que resolvemos a continuación es realmente sorprendente:

▷ EJEMPLO. Demostrar que $z = i^i$ es real.

Aplicamos la definición anterior:

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i \ln i} = e^{i[\frac{\pi}{2} + 2n\pi]} \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Por tanto, en la determinación principal tenemos que $i^i = e^{-\pi/2}$. ¿Quién hubiera imaginado que $\sqrt{-1}$ elevado a $\sqrt{-1}$ es igual a 0,20788...?

Hay un detalle sutil que quizá no haya pasado inadvertido a ciertos lectores. Si tomamos en la definición de arriba $z = e$, obtenemos la función $f(w) = e^w$. Sin embargo, al comienzo de este capítulo se había establecido que la función exponencial es monovaluada mientras que la definición de arriba nos lleva a pensar que e^w es multivaluada. Ésta es la razón por la que algunos autores prefieren expresar la función exponencial como $\exp(z)$ y dejar la notación e^z sólo para las potencias. En este curso hemos empleado, por simplificar, la misma notación para las dos expresiones, pero conviene tener en mente esta diferencia si surge alguna ambigüedad.

Si el exponente w no es racional, entonces la función $f(z) = z^w$ posee, en general, infinitas ramas al igual que $\ln z$:

$$z^w = e^{w \ln z} = e^{(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)w} e^{2\pi i n w}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Sin embargo, cuando w es racional, el factor $e^{2\pi i n w}$ puede llegar a repetirse para dos valores distintos de n debido a la periodicidad de la función exponencial. Entonces, $f(z)$ tendrá un número *finito* de ramas y podremos definir una colección de funciones unívocas que sean analíticas en cada uno de los intervalos de definición.

▷ EJEMPLO. Determinar las ramas de la función $f(z) = z^{1/2}$.

Aplicamos la definición anterior:

$$z^{1/2} = e^{(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)/2} e^{\pi i n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Observamos que $n = 0$ y $n = 1$ dan dos valores distintos del factor $e^{\pi i n}$: $e^0 = 1$ si $n = 0$ y $e^{i\pi} = -1$ si $n = 1$. Ahora bien, $n = 2$ produce $e^{2\pi i}$, que equivale a e^0 ($n = 0$). Si continuamos aumentando n , iremos reproduciendo los factores previos. Por tanto, la función $f(z) = z^{1/2}$ posee sólo dos ramas:

$$\begin{aligned} F_1 &= e^{(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)/2} \\ F_2 &= -e^{(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)/2} \end{aligned}$$

Tanto F_1 como F_2 son analíticas y unívocas. Puesto que $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, la rama F_1 resulta ser la principal.

3.7. Inversas de funciones trigonométricas e hiperbólicas

El objetivo de esta sección es estudiar brevemente la forma compleja de las inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas que hemos analizado anteriormente. Veremos que existe una íntima relación entre estas funciones y la función $\ln z$.

Recordemos que una función inversa $f^{-1}(z)$ de una función dada $f(z)$ verifica la ecuación

$$f^{-1}(f(z)) = f(f^{-1}(z)) = z$$

Empecemos con un ejemplo sencillo, pero ilustrativo. Sea $w = f(z) = \arcsen z$. Sabemos que $\sen(\arcsen z) = z$. Entonces, $z = \sen w$. Apliquemos ahora la definición de la función \sen :

$$z = \sen w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

En esta ecuación, w es la incógnita. Es conveniente introducir la variable $\phi = e^{iw}$, que satisface una ecuación de segundo grado:

$$\phi - \frac{1}{\phi} = 2iz \implies \phi^2 - 2iz\phi - 1 = 0$$

cuya solución es

$$\phi = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

Finalmente, escribimos w en función de z :

$$w = \arcsen z = -i \ln \left[iz \pm \sqrt{1 - z^2} \right]$$

Claramente, $\arcsen z$ es una función multivaluada, pues el logaritmo lo es. Si tomamos una determinación dada de la raíz cuadrada y del logaritmo, entonces $\arcsen z$ se vuelve monovaluada y analítica.

Siguiendo el mismo procedimiento de arriba, se deducen expresiones similares para el resto de las funciones inversas:

$$\arccos z = -i \ln \left[z \pm i\sqrt{1 - z^2} \right]$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}$$

$$\operatorname{arcsenh} z = \ln \left[z \pm \sqrt{z^2 + 1} \right]$$

$$\operatorname{arccosh} z = \ln \left[z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right]$$

$$\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

▷ EJEMPLO. Encontrar todos los valores de $w = \operatorname{arctgh} i$

Usando la expresión anterior, obtenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2} \ln i \\ &= i \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

3.8. Aplicación: Circuito RLC

Los números complejos se utilizan constantemente en ingeniería eléctrica a la hora de analizar circuitos. Cuando la fuente de tensión es alternante (AC) en el tiempo, con un término del tipo $V = V_0 \cos \omega t$, siendo V_0 el voltaje pico o amplitud, ω la frecuencia angular y t el tiempo, se puede explotar la fórmula de Euler y sustituir V por

$$\mathcal{V} = V_0 e^{i\omega t}$$

donde \mathcal{V} recibe el nombre de **fazor**. Obviamente, el voltaje real aplicado es $V = \operatorname{Re} \mathcal{V}$, pero es mucho más conveniente trabajar con la función exponencial que con senos o cosenos, pues las operaciones de derivación e integración se simplifican considerablemente.

Un fazor tiene, como cualquier número complejo expresado en forma polar, un módulo y una fase. En el caso anterior, el módulo es V_0 y la fase, ωt . Al aumentar t , el fazor rota en el plano complejo con velocidad ω , de la misma forma que se describía el movimiento planetario en el capítulo 1.

Se ilustra ahora el manejo de fasores por medio de un ejemplo relevante: el circuito RLC, donde una fuente de tensión AC se conecta en serie con tres elementos: una resistencia (R), una inductancia (L) y un condensador (C). La importancia práctica de este circuito proviene del hecho de que exhibe **resonancias**, como veremos a continuación.

Por la ley de la conservación de energía, la suma de las caídas de voltajes a través de los tres elementos anteriores debe ser igual a la tensión aplicada:

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

donde $I = \frac{dQ}{dt}$ es la corriente o flujo de carga Q circulando por el circuito. Por tanto:

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = V$$

donde las primas indican derivadas con respecto a t . La expresión anterior es una ecuación diferencial de segundo orden que puede resolverse con métodos

estándar¹. Sin embargo, es más sencillo si empleamos fasores. La derivada de una función exponencial compleja es simplemente $(e^{i\omega t})' = i\omega e^{i\omega t}$. Luego sustituimos Q por su fesor \mathcal{Q} y reemplazamos cada derivada por un factor multiplicativo $i\omega$:

$$[(i\omega)^2 L + i\omega R + C^{-1}] \mathcal{Q} = \mathcal{V}$$

Nótese que hemos transformado una ecuación diferencial en una ecuación algebraica cuya solución encontramos rápidamente:

$$\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{V}}{-\omega^2 L + i\omega R + C^{-1}}$$

o en términos del fesor de corriente, $\mathcal{I} = i\omega \mathcal{Q}$:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{R + i\omega L + 1/i\omega C}$$

Esta expresión tiene una forma muy atractiva, lo que sugiere la siguiente interpretación: la resistencia total del circuito es la suma (por estar en serie) de los «resistencias» asociadas a cada uno de los elementos: R , $i\omega L$ y $1/i\omega C$. El único término de estas resistencias que es real es R , como se esperaba. La novedad es que los otros dos términos también poseen unidades de resistencia, si bien son resistencias imaginarias. Cuando sumamos las tres, $Z = R + i\omega L + 1/i\omega C$, construimos una resistencia compleja Z denominada **impedancia**. Entonces, en términos de fasores la corriente que pasa por el sistema es

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{V}}{Z}$$

Esta relación es simplemente la ley de Ohm expresada con ayuda de fasores. Resumiendo: cuando se analiza un circuito con una fuente de alimentación AC, las leyes de Kirchhoff siguen siendo válidas si se admite la posibilidad de resistencias complejas. Desde el punto de vista práctico, los cálculos son mucho más fáciles y el último paso que nos queda es deshacer el cambio a fasores para hallar la dependencia temporal de la corriente real que se mediría en el circuito.

Primero, expresamos Z en forma polar:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} e^{i\phi}$$

donde la fase es $\phi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$. En consecuencia:

$$\mathcal{I} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

¹ Por ejemplo, véase en el apéndice de este libro el método de las transformadas de Laplace.

y la corriente física no sería más que la parte real de la expresión anterior:

$$I = \operatorname{Re} \mathcal{I} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

Observamos dos hechos notables. En primer lugar, la fase relativa entre la corriente y el voltaje puede ser no nula, $\phi \neq 0$. Esto implica que la corriente y el voltaje no solapan en el tiempo, por lo que la corriente puede adelantarse ($\phi > 0$) o retrasarse respecto al voltaje ($\phi < 0$) dependiendo de si el comportamiento del circuito es predominantemente capacitivo o inductivo. En segundo lugar, la magnitud de la corriente cambia fuertemente debido al módulo de Z . De hecho, cuando la frecuencia aplicada satisface la relación $\omega = 1/\sqrt{LC}$, el término entre paréntesis que está dentro de la raíz cuadrada se hace cero y la corriente es máxima. En ese punto, la caída de voltaje a través de la inductancia anula la que se produce a través del condensador, la fase toma el valor $\phi = 0$, y el circuito, entonces, entra en resonancia eléctrica, un fenómeno de gran aplicación en muchas áreas.

3.9. Problemas resueltos

- PROBLEMA. Ordenar de menor a mayor las partes reales de los siguientes números complejos:

$$(-1)^i, \quad \operatorname{senh}(\pi i), \quad i \ln \sqrt{-1+i}.$$

Tomar el valor principal del logaritmo cuando proceda.

Solución. Para calcular la parte real, expresamos los números complejos en forma cartesiana:

$$\begin{aligned} (-1)^i &= e^{i \ln(-1)} = e^{i(\ln|1| + i\pi)} = e^{-\pi} \\ \operatorname{senh}(\pi i) &= i \operatorname{sen} \pi = 0 \\ i \ln \sqrt{-1+i} &= \frac{i}{2} \ln(-1+i) = \frac{i}{2} \left(\ln \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{i}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

Luego $\operatorname{Re}[i \ln \sqrt{-1+i}] < \operatorname{Re}[\operatorname{senh}(\pi i)] < \operatorname{Re}[(-1)^i]$.

- PROBLEMA. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(\theta) = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Expresar los siguientes números complejos en forma cartesiana, tomando la determinación principal del logaritmo cuando proceda:

$$(a) f(\pi/4) \quad (b) \ln(1 - f(\pi/2)) \quad (c) (1 - f(\pi))^{2/\pi}$$

Solución. (a) f es un cociente de números complejos. Multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador, se obtiene la expresión simplificada

$$f(\theta) = i \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$$

Sustituyendo θ por $\pi/4$ tenemos que

$$f(\pi/4) = i \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = i(1 + \sqrt{2})$$

(b) De la expresión anterior, se deduce que $f(\pi/2) = i$. Por tanto,

$$\ln(1 - f(\pi/2)) = \ln(1 - i) = \ln \sqrt{2} - i \frac{\pi}{4}$$

en la determinación principal del logaritmo.

(c) Sabemos que $f(\pi) = 0$. Entonces,

$$(1 - f(\pi))^{2/\pi} = 1^{2/\pi} = e^{(2/\pi) \ln 1} = 1$$

en la determinación principal del logaritmo.

□ PROBLEMA. Hallar el valor principal de las siguientes expresiones:

$$(a) \sqrt[i]{1-i} \quad (b) \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Solución. (a) Expresamos $z = \sqrt[i]{1-i} = (1-i)^{1/i}$ en términos de las funciones exponencial y logaritmo:

$$z = e^{-i \ln(1-i)}$$

Puesto que $\operatorname{mod}(1-i) = \sqrt{2}$ y $\operatorname{Arg}(1-i) = -\pi/4$, podemos aplicar la definición de la función logaritmo

$$z = e^{-i(\ln \sqrt{2} - i\pi/4)}$$

y, a continuación, usar la fórmula de Euler para simplificar la exponencial:

$$z = e^{-\pi/4} (\cos \ln \sqrt{2} - i \operatorname{sen} \ln \sqrt{2})$$

(b) Empleamos la relación $\operatorname{arccosh} z = \ln[z + \sqrt{z^2 - 1}]$ donde hemos escogido la rama positiva de la raíz cuadrada ya que nos piden el valor principal. Sustituyendo $z = 1/\sqrt{2}$ obtenemos

$$\operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{2}} = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

El número $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$ tiene módulo 1 y argumento principal $\pi/4$. Aplicando la definición de la función logaritmo, encontramos que

$$\operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{2}} = i \frac{\pi}{4}$$

□ PROBLEMA. Hallar todas las soluciones posibles de las siguientes ecuaciones:

$$(a) \operatorname{sen} z = i \operatorname{senh} 4 \quad (b) i^z = e^{1+i\pi z} \quad (c) \operatorname{sen} z = \cosh 2$$

Solución. (a) Escribimos $z = x + iy$ y, sustituyendo en la relación anterior, obtenemos dos ecuaciones tras igualar partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \cosh y &= 0 \\ \cos x \operatorname{senh} y &= \operatorname{senh} 4 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene que $y = 4$ y $x = 2n\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Otra posible solución es $y = -4$ y $x = (2n + 1)\pi$. En ambos casos se satisface la primera ecuación. Por tanto, la solución más general es $z = 2n\pi + 4i$ y $z = (2n + 1)\pi - 4i$.

(b) Aplicamos la definición de exponentes complejos al miembro izquierdo de la ecuación:

$$i^z = e^{z \ln i} = e^{z[\ln |1| + i(\pi/2 + 2n\pi)]}$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Igualando los exponentes de ambos términos, se obtiene la relación

$$iz(\pi/2 + 2n\pi) = 1 + i\pi z$$

Por tanto, la solución más general es

$$z = -\frac{i}{2n\pi - \pi/2}$$

(c) Recordando que $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cosh x$, igualamos partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x \cosh y &= \cosh 2 \\ \operatorname{senh} y \cosh x &= 0\end{aligned}$$

De la primera ecuación deducimos que $y = 2$ y de la segunda, $x = \pi(2n + 1/2)$, por lo cual la solución es $z = \pi(2n + 1/2) + 2i$.

□ PROBLEMA. Sea

$$f(z) = \ln(z) + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\operatorname{senh}(\pi z)}$$

- (a) Analizar el dominio de analiticidad de f .
 (b) Expresar $f(i/2)$ en forma cartesiana.

Solución. (a) La función compleja f es la suma de la función logaritmo y de la inversa del seno hiperbólico. Por un lado, el logaritmo es una función multivaluada y no es analítica en general, aunque podemos escoger una rama donde lo sea. Así, para todo $z = re^{i\theta}$ tal que $-\pi < \theta < \pi$ (la rama principal), el $\ln(z)$ es una función analítica.

Por otra parte, la función $\operatorname{senh}(\pi z)$ es entera y su inversa será analítica en todo \mathbb{C} salvo en aquellos puntos que anulen el denominador. Los ceros de $\operatorname{senh}(\pi z)$ son $z = in$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. En consecuencia, f es analítica en la rama principal del logaritmo y para todo z tal que $z \neq in$.

(b) Primero, calculamos $\ln(i/2)$ aplicando la definición:

$$\ln(i/2) = \ln|i/2| + i[\operatorname{Arg}(i/2) + 2n\pi] = -\ln 2 + i\pi(2n + 1/2)$$

Ahora hallamos $\operatorname{senh}(\pi i/2)$:

$$\operatorname{senh}(\pi i/2) = i \operatorname{sen}(\pi/2) = i$$

Por tanto,

$$f(i/2) = -\ln 2 + i\pi(2n + 1/2) + \frac{\pi}{2} \frac{1}{i} = -\ln 2 + i2n\pi$$

3.10. Ejercicios

1. Hallar todas las posibles soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen}(iz^*) = [\operatorname{sen}(iz)]^*$$

2. Demostrar que $\ln(-1+i)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(-1+i)$, calculando el conjunto de valores de cada miembro de la ecuación por separado.
3. Determinar $(-1-i)^{4i}$ e indicar su valor principal.
4. Determinar todos los valores de 1^π y razonar por qué esta expresión es igual a 1 en \mathbb{R} .
5. Hallar todos los valores de $w = \operatorname{arctg} 2i$.

3.11. Nota histórica

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suizo, quizá el más grande de todos los tiempos si exceptuamos a Gauss. Fue Euler quien introdujo por primera vez la notación $i = \sqrt{-1}$. Su memoria era tan prodigiosa (se dice que era capaz de recitar la *Eneida* del primer al último verso), que le permitió seguir haciendo cálculos incluso después de quedarse ciego. Murió una noche de un infarto cerebral mientras trabajaba.



4

Integrales

EL CARÁCTER BIDIMENSIONAL de los números complejos hace que las integrales necesiten definirse en el plano. A primera vista, las complicaciones que conlleva este cambio pueden ser formidables. Sin embargo, cuando la función es analítica, Cauchy demostró que la integral a lo largo de un contorno cerrado es cero. Este resultado tiene hondas consecuencias que irán saliendo a lo largo del curso. Por si fuera poco, Cauchy descubrió una fórmula integral para funciones analíticas que muestra las propiedades más importantes de estas funciones.

4.1. Integrales de funciones de variable real

Las integrales de funciones complejas de variable real

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x) = u(x) + iv(x)$$

son una mera extensión de las integrales de funciones reales:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx$$

Estas integrales se comportan de forma muy similar a las integrales reales y no aportan ningún resultado que no conozcamos ya del análisis real.

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_0^1 (x+i)^2 dx$.

Aplicamos la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(x^2 - 1) + i2x] \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x + ix^2 \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + i \end{aligned}$$

4.2. Integrales de contorno

Cuando tratamos con funciones complejas de variable compleja,

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

la integral pasa a definirse en el plano \mathbb{C} y, por tanto, el dominio de integración puede ser cualquier curva del plano.

Definición. Una **curva** o **arco** en \mathbb{C} es un conjunto de puntos representados paraméricamente por $z(t) = x(t) + iy(t)$ donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro definido en el intervalo real $a \leq t \leq b$ y $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas. Una curva se denomina **simple** si no se cruza consigo misma, es decir, si se verifica que $z(t_1) \neq z(t_2)$ si $t_1 \neq t_2$.

▷ EJEMPLO. Proponer una parametrización para el **segmento** de recta que une los puntos z_0 y z_1 en el plano complejo.

Sea t un parámetro definido en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Entonces, el segmento pedido se parametriza mediante la ecuación

$$\mathcal{C} : z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t$$

Efectivamente, si expresamos los puntos en coordenadas cartesianas ($z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $z_1 = x_1 + iy_1$), sustituimos en la ecuación de arriba e igualamos partes real e imaginaria, obtenemos el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t \end{aligned}$$

que son las conocidas ecuaciones en forma paramétrica de la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) .

Las curvas cerradas representan un papel fundamental en la teoría de las integrales complejas.

Definición. Una **curva cerrada simple** es una curva simple donde $z(b) = z(a)$ es el único punto de intersección.

- ▷ EJEMPLO. Hallar una parametrización de la **circunferencia** de radio R centrada en el punto z_0 .

Sea el parámetro $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, la circunferencia se parametriza del siguiente modo:

$$\mathcal{C} : z(t) = z_0 + Re^{it}$$

Recordemos que ya habíamos visto un ejemplo de esta curva en la sección 1.9.

En las curvas cerradas se suele definir una orientación mediante una flecha. Se toma por convenio que la orientación *positiva* es en sentido antihorario. Entonces, el contorno $-\mathcal{C}$ tiene una orientación opuesta. Esta notación también se utiliza para un arco en general. En el ejemplo del segmento de recta, tenemos que

$$-\mathcal{C} : z(t) = z_1 - (z_1 - z_0)t \quad 0 \leq t \leq 1$$

es una parametrización que une los puntos z_0 y z_1 partiendo de z_1 . Una forma equivalente es hacer la sustitución $t \rightarrow -t$ en las expresiones previas (incluyendo las desigualdades).

Definición. Cuando las funciones $x(t)$ e $y(t)$ son, además de continuas, derivables, se dice que la curva (sea o no cerrada) es **suave**.

Para entender intuitivamente el concepto de suavidad, podemos decir que, geoméricamente, una curva suave no tiene ni esquinas ni picos.

Definición. Un **contorno** o **camino** \mathcal{C} es una curva suave a tramos.

La definición anterior nos permite establecer el método de cálculo de las integrales en \mathbb{C} . La integral de $f(z)$ a lo largo del camino \mathcal{C} se calcula del siguiente modo:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

donde f es continua para $a \leq t \leq b$. La ecuación anterior puede tomarse como una definición o bien, siguiendo la misma estrategia que en análisis real, uno puede interpretarla como el límite de una suma de Riemann¹. Nótese que no exigimos que f sea derivable o analítica, sólo que \mathcal{C} sea suave a tramos.

¹ La definición es análoga a la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria. Desde el punto de vista físico, no es más que el *trabajo* realizado por el campo.

Propiedades de las integrales de contorno:

1. $\int_{\mathcal{C}} wf(z) dz = w \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ para todo $w \in \mathbb{C}$
2. $\int_{\mathcal{C}} [f(z) + g(z)] dz = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}} g(z) dz$
3. $\int_{-\mathcal{C}} f(z) dz = - \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$
4. $\int_{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$ si el punto inicial de \mathcal{C}_2 coincide con el final de \mathcal{C}_1
5. $\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| dz$
6. $\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq ML$ si $|f(z)| \leq M$ en \mathcal{C} siendo $L = \int_{\mathcal{C}} |dz| = \int_{\mathcal{C}} |z'(t)| dt$ la longitud de la curva \mathcal{C} .

A continuación presentamos dos ejemplos que ilustran la forma de calcular integrales de contorno.

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_{\mathcal{C}} z^* dz$ a lo largo de dos contornos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 que unen los puntos $z_0 = 1$ y $z_1 = -1$. \mathcal{C}_1 es la semicircunferencia de radio unidad y \mathcal{C}_2 está compuesto por los segmentos que unen 1 y $1+i$, $1+i$ y $-1+i$, y $-1+i$ y -1 .

Sea $f(z) = z^*$. Comenzamos con el cálculo a lo largo de \mathcal{C}_1 . En primer lugar, parametrizamos la curva. Como es una semicircunferencia, tomamos $0 \leq t \leq \pi$:

$$\mathcal{C}_1 : z(t) = e^{it}$$

Por tanto:

$$f(z(t)) = f(e^{it}) = e^{-it}$$

El último ingrediente que nos falta es $z'(t) = ie^{it}$. Utilizando la definición de integral de contorno, obtenemos

$$I = \int_0^{\pi} e^{-it} ie^{it} dt = \pi i$$

Para determinar I a lo largo de \mathcal{C}_2 , observamos que \mathcal{C}_2 se puede descomponer en tres segmentos rectos:

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2^{(1)} + \mathcal{C}_2^{(2)} + \mathcal{C}_2^{(3)}$$

y, por tanto, la integral podrá expresarse como la suma

$$I = \int_{\mathcal{C}_2} = \int_{\mathcal{C}_2^{(1)}} + \int_{\mathcal{C}_2^{(2)}} + \int_{\mathcal{C}_2^{(3)}}$$

Calculamos cada integral por separado.

- $\mathcal{C}_2^{(1)} : z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = i$

$$\int_{\mathcal{C}_2^{(1)}} = \int_0^1 (1 + it)^* i dt = i \left[t - i \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + i$$

- $-\mathcal{C}_2^{(2)} : z(t) = i + t \quad (-1 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = 1$

$$\int_{\mathcal{C}_2^{(2)}} = - \int_{-1}^1 (i + t)^* dt = - \left[-it + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = 2i$$

- $-\mathcal{C}_2^{(3)} : z(t) = -1 + it \quad (0 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = i$

$$\int_{\mathcal{C}_2^{(3)}} = - \int_0^1 (-1 + it)^* i dt = i \left[t + i \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + i$$

En consecuencia, el valor total será:

$$I = \frac{1}{2} + i + 2i - \frac{1}{2} + i = 4i$$

Una observación importante del ejemplo anterior es que I toma un valor distinto dependiendo de si hacemos la integral a lo largo de \mathcal{C}_1 o de \mathcal{C}_2 , es decir, que I depende del camino elegido. Hay otro tipo de integrales, mucho más interesantes, que dependen sólo de los puntos inicial y final del contorno.

▷ EJEMPLO.

Sea $f(z) = z^2$. Determinar $I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ entre los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = 1 + i$ a lo largo de los contornos indicados abajo.

- \mathcal{C}_1 es la recta $y = x$:

$$\mathcal{C}_1 : z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = 1 + i$$

Calculamos la integral teniendo en cuenta que $f(z(t)) = (t + it)^2$:

$$I = \int_0^1 (t^2 - t^2 + 2it^2)(1 + i) dt = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

- \mathcal{C}_2 es la parábola $y = x^2$:

$$\mathcal{C}_2 : z(t) = t + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = 1 + 2it$$

La integral se halla de la misma forma, usando ahora el hecho de que $f(z(t)) = (t + it^2)^2$:

$$I = \int_0^1 (t^2 - t^4 + 2it^3)(1 + 2it) dt = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

- \mathcal{C}_3 es la combinación de dos tramos rectos: $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_3^{(1)} + \mathcal{C}_3^{(2)}$, donde $\mathcal{C}_3^{(1)}$ representa la recta $y = 0$ y $\mathcal{C}_3^{(2)}$ corresponde a la recta $x = 1$:

$$\mathcal{C}_3^{(1)} : z(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = 1$$

$$\mathcal{C}_3^{(2)} : z(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1) \implies z'(t) = i$$

La integral viene dada por la suma de las integrales a lo largo de los contornos que acabamos de parametrizar:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{C}_3^{(1)}} + \int_{\mathcal{C}_3^{(2)}} = \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 + it)^2 i dt \\ &= \frac{1}{3} - 1 + i\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Luego I es independiente de los tres caminos elegidos.

La diferencia entre los dos ejemplos está, naturalmente, en que $f(z) = z^*$ no es analítica mientras que $f(z) = z^2$ sí lo es. Este resultado sugiere la posibilidad de que las integrales de funciones analíticas son independientes del contorno elegido. Antes de demostrar esta afirmación, determinemos primero la derivada de la composición $f(z(t)) = u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))$:

$$\frac{df(z(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)$$

Recurrimos a las ecuaciones de Cauchy-Riemann para deshacernos de la dependencia en la variable y :

$$\begin{aligned} \frac{df(z(t))}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dy}{dt} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{dt} \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{f'(z(t))} \underbrace{\left(\frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right)}_{z'(t)} = f'(z(t)) z'(t) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que existe una función $F(z)$ tal que su derivada es $F'(z) = f(z)$ en un cierto dominio \mathcal{D} . Entonces, podemos aplicar el resultado anterior a F :

$$\frac{dF(z(t))}{dt} = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$$

y sustituir en la definición de integral compleja:

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt = \int_a^b \frac{dF(z(t))}{dt} dt = F(z(b)) - F(z(a))$$

Hemos, encontrado, pues una extensión del *teorema fundamental del cálculo* aplicado a funciones complejas. La función $F(z)$ se denomina **primitiva** o antiderivada de $f(z)$. Además, como I depende sólo de los puntos inicial y final, acabamos de demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Sea $f(z)$ continua en el dominio simplemente conexo \mathcal{D} . Si \mathcal{C} es un contorno de \mathcal{D} y $f(z)$ posee una primitiva, entonces*

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

es independiente del contorno \mathcal{C} . El recíproco también es cierto.

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_{\mathcal{C}} z^2 dz$ a lo largo de cualquier contorno que una los puntos $z_0 = 0$ y $z_1 = 1 + i$.

Esta integral es la misma que la del ejemplo precedente, pero ahora es mucho más fácil de determinar, pues no hace falta parametrizar ningún contorno ya que el teorema anterior establece que si $f(z)$ es continua (y $f(z) = z^2$ lo es) y tiene una primitiva ($F(z) = z^3/3$, que es analítica), entonces I sólo depende de z_0 y z_1 :

$$I = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$$

No es sorprendente que el resultado sea idéntico al obtenido aplicando la definición, pero ahora el método es mucho más rápido.

Nótese que sería un error aplicar este teorema a la integral $I = \int_{\mathcal{C}} z^* dz$ que vimos previamente, puesto que $F(z) = (z^*)^2/2$ no es la primitiva de $f(z) = z^*$, pues F no es una función analítica y carece, por tanto, de derivada.

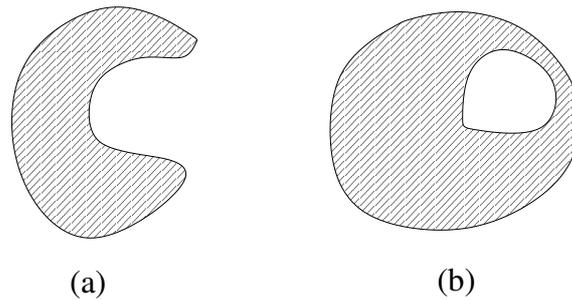


Figura 4.1: Ejemplos de dominios simplemente conexo (a) y múltiplemente conexo (b).

4.3. Teorema de Cauchy-Goursat

Un corolario que se deduce inmediatamente del teorema anterior es que si $a = b$ (contorno cerrado), entonces

$$I = \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

para toda $f(z)$ que posea una primitiva.

Sin embargo, resulta que ni siquiera hace falta que $f(z)$ tenga una primitiva para que las integrales sobre contornos cerrados de ciertas funciones sean cero. En realidad, el teorema de Cauchy-Goursat, que enunciamos más abajo, afirma que si f es analítica dentro de ciertos dominios, entonces $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$. ¿De qué dominios se trata?

Según el teorema del arco de Jordan, cualquier contorno simple cerrado \mathcal{C} divide el plano complejo en dos dominios, a saber, uno acotado en el interior de \mathcal{C} y otro sin acotar en el exterior de \mathcal{C} ².

Definición. Un dominio \mathcal{D} es **conexo** si para todo $z_0, z_1 \in \mathcal{D}$ existe un contorno \mathcal{C} con extremos inicial z_0 y final z_1 tal que \mathcal{C} está contenido en \mathcal{D} .

Definición. Un dominio \mathcal{D} es **simplemente conexo** si todo contorno cerrado simple $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ encierra únicamente puntos de \mathcal{D} .

Definición. Un dominio \mathcal{D} es **múltiplemente conexo** si no es simplemente conexo.

Pensando de forma sencilla, la diferencia entre ambos dominios es que el dominio simplemente conexo no tiene «agujeros», como muestra, por ejemplo, la

² Este teorema, aunque intuitivamente evidente, es muy complejo de demostrar.

figura 4.1(a), a diferencia de un dominio múltiplemente conexo [véase la figura 4.1(b)].

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo \mathcal{D} . Si \mathcal{C} es un contorno simple cerrado dentro de \mathcal{D} , entonces

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}} [u(x, y) + iv(x, y)] [dx + idy] \\ &= \oint_{\mathcal{C}} (u dx - v dy) + i \oint_{\mathcal{C}} (v dx + u dy) \end{aligned}$$

Hemos transformado, pues, una integral sobre el plano complejo en dos integrales de línea sobre el plano real.

Ahora bien, según el teorema de Green³, una integral de línea se puede transformar en una de superficie usando las derivadas parciales de u y v . Aplicamos este resultado a las dos integrales de arriba:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I &= \iint_{\mathcal{R}} (-v_x - u_y) dx dy \\ \operatorname{Im} I &= \iint_{\mathcal{R}} (u_x - v_y) dx dy \end{aligned}$$

donde \mathcal{R} es la región interior a \mathcal{C} . Pero las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos dicen que $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Luego:

$$\operatorname{Re} I = 0, \operatorname{Im} I = 0 \implies \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

Este resultado constituye el famoso **teorema de Cauchy**. Durante la demostración se ha supuesto que las derivadas parciales son continuas para aplicar el teorema de Green; equivalentemente, f' debe ser continua. Años más tarde, Goursat fue capaz de demostrar que esta condición no era necesaria:

Teorema de Cauchy-Goursat. *Sea $f(z)$ una función analítica en el dominio simplemente conexo \mathcal{D} . Para todo $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ (ver figura 4.2) se cumple que*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

El hecho de que sea innecesaria la condición de la continuidad de f' no es baladí. En realidad, como veremos más adelante, una función analítica tiene, necesariamente, todas sus derivadas analíticas, lo cual forma uno de los resultados más importantes del análisis complejo.

³ Véase cualquier libro de análisis vectorial; por ejemplo, *Cálculo vectorial*, J. E. Marsden y A. J. Tromba, Addison-Wesley (1991).

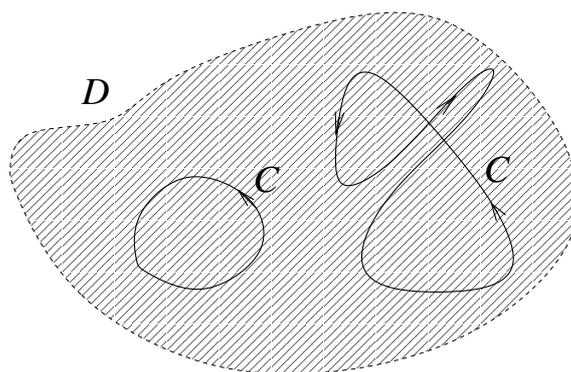


Figura 4.2: Si f es analítica dentro del dominio \mathcal{D} , entonces el teorema de Cauchy-Goursat afirma que la integral de f a lo largo de cualquier camino cerrado \mathcal{C} dentro de \mathcal{D} (incluidos los que tengan intersecciones) es cero.

Además, el contorno \mathcal{C} no tiene por qué ser un contorno cerrado simple. Si \mathcal{C} tiene un número finito de intersecciones como en el ejemplo de la figura 4.2, siempre se puede aplicar el teorema a cada uno de los contornos simples resultantes y la conclusión final seguiría siendo que $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$.

Consideremos ahora un cierto contorno cerrado \mathcal{C} que dividimos en dos caminos simples: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$. Aplicamos el teorema de Cauchy Goursat:

$$\oint_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_1} + \int_{\mathcal{C}_2} = 0 \implies \int_{\mathcal{C}_1} = - \int_{\mathcal{C}_2} = \int_{-\mathcal{C}_2}$$

Ahora bien, $-\mathcal{C}_2$ es el contorno que va del punto inicial al final de \mathcal{C}_1 , es decir, se trata de un camino distinto a \mathcal{C}_1 y que comunica los mismos extremos. Luego del teorema de Cauchy-Goursat se desprende que la integral de una función analítica entre dos puntos del plano \mathbb{C} es independiente del contorno elegido. Según el recíproco del teorema sobre primitivas de $f(z)$ que vimos anteriormente, esto significa que *cualquier* función analítica tiene forzosamente una primitiva en todo \mathcal{D} .

El teorema de Cauchy-Goursat se puede generalizar a dominios múltiplemente conexos. Considérese la figura 4.3 donde se muestra un contorno simple cerrado \mathcal{C} con un agujero. El agujero está limitado por el contorno simple cerrado \mathcal{C}_1 . Los contornos cerrados \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 se comunican mediante los caminos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Llamemos \mathcal{C}^* y \mathcal{C}_1^* a las porciones de \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 que quedan por encima de los extremos de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 . Podemos, pues, definir los contornos simples cerrados

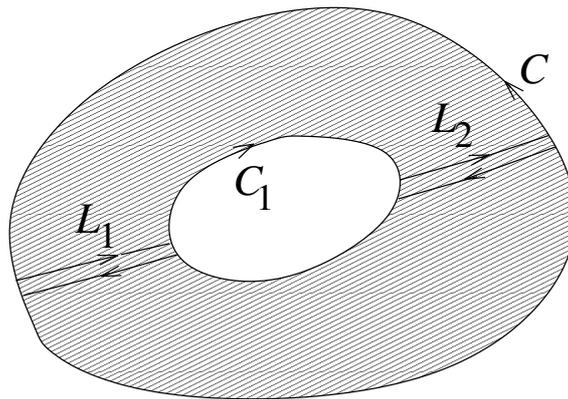


Figura 4.3: Dominio múltiplemente conexo para la demostración del teorema de Cauchy-Goursat.

siguientes:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= \mathcal{C}^* + L_1 + \mathcal{C}_1^* + L_2 \\ \mathcal{K}_2 &= \mathcal{C} - \mathcal{C}^* - L_1 + \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_1^* - L_2\end{aligned}$$

Estos contornos, definidos así para evitar el agujero, encierran dominios simplemente conexos. Entonces, podemos aplicar el teorema de Cauchy-Goursat a cada uno de ellos:

$$\int_{\mathcal{K}_1} = \int_{\mathcal{K}_2} = 0 \implies \int_{\mathcal{K}_1} + \int_{\mathcal{K}_2} = 0 \implies \int_{\mathcal{K}} = 0$$

donde $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 = \mathcal{C} + \mathcal{C}_1$. Por tanto, queda demostrado el teorema de Cauchy-Goursat extendido a dominios múltiplemente conexos:

Teorema. Sea \mathcal{C} un contorno simple cerrado y $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ un número finito de contornos simples cerrados dentro de \mathcal{C} tales que las regiones interiores de cada \mathcal{C}_k ($k = 1, \dots, n$) no tengan puntos en común. Si $f(z)$ es analítica en el dominio \mathcal{D} que comprende todos los contornos y la región entre \mathcal{C} y $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, entonces

$$\int_{\mathcal{K}} f(z) dz = 0$$

donde \mathcal{K} es la frontera orientada de \mathcal{D} .

En el teorema anterior, las orientaciones de los contornos \mathcal{C} y $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ se toman de tal manera que todos los puntos de \mathcal{D} se sitúan a la izquierda de aquéllos.

Un corolario que se sigue del teorema anterior afirma uno puede deformar continuamente un contorno en otro y la integral de f resulta ser invariante siempre

que los puntos que hayamos atravesado durante la transformación pertenezcan al dominio de analiticidad de f . Efectivamente, considérese de nuevo la figura 4.3 y supóngase que \mathcal{C}_1 está orientado en sentido contrario. f es analítica en la región entre \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 y, de acuerdo al teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz - \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz = 0$$

(el signo $-$ se debe a que estamos suponiendo que \mathcal{C}_1 está orientado en sentido horario). Entonces, se tiene que

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z) dz$$

Vamos ahora a ilustrar el teorema de Cauchy-Goursat con unos ejemplos.

- ▷ EJEMPLO. Sea \mathcal{C} la circunferencia de radio unidad $|z| = 1$ orientada positivamente. Hallar el valor de las siguientes integrales:

$$I_1 = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4 + 4} \quad I_2 = \oint_{\mathcal{C}} e^{-z^2} dz \quad I_3 = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{\cosh z}$$

Podemos aplicar el teorema de Cauchy-Goursat a los tres integrandos, ya que los tres son analíticos en la región $|z| \leq 1$ (la función $f(z) = \frac{1}{z^4 + 4}$ no es analítica en $z = \pm 2i$, pero estos puntos caen fuera del dominio propuesto; lo mismo sucede con la función $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$, que es singular en $z = \pm \pi i/2, \pm 3\pi i/2, \dots$). Por tanto, las tres integrales son cero.

- ▷ EJEMPLO. Calcular las **integrales de Fresnel**:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx, \int_0^{\infty} \operatorname{cos} x^2 dx$$

Hasta ahora nos habíamos centrado en calcular integrales de funciones complejas. El ejemplo que debemos resolver ahora es importante pues se trata de aplicar un resultado de análisis complejo (el teorema de Cauchy-Goursat) al cálculo de una integral *real*. Estas integrales tienen interés desde el punto de vista físico pues aparecen en la teoría de difracción óptica. Consideremos la función $f(z) = e^{-z^2}$, que es analítica en todo \mathbb{C} . Debido al teorema de Cauchy-Goursat tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$$

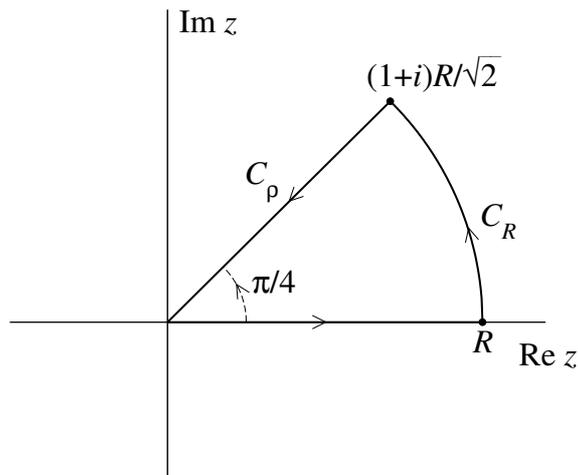


Figura 4.4: Contorno para evaluar las integrales de Fresnel.

para cualquier contorno cerrado \mathcal{C} . Tomemos \mathcal{C} definido por el segmento del eje real que va del origen al punto $z = R$, el arco circular \mathcal{C}_R correspondiente a la circunferencia de radio R cuando el ángulo θ está en el intervalo $[0, \pi/4]$ y el segmento \mathcal{C}_ρ que va desde el extremo final del arco anterior al origen, cerrándose así todo el contorno \mathcal{C} (véase figura 4.4). Al final, tomaremos el límite $R \rightarrow \infty$.

La integral sobre \mathcal{C} puede descomponerse en la forma

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \underbrace{\int_0^R e^{-x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz}_{I_2} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}_\rho} f(z) dz}_{I_3}$$

La primera integral la conocemos del análisis real:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

La segunda integral se anula en el límite $R \rightarrow \infty$. Para demostrarlo, hacemos el cambio de variables $z = Re^{i\theta}$. Como quiera que, a lo largo del arco \mathcal{C}_R , R es constante y sólo varía el parámetro θ , tenemos que $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ y podemos expresar I_2 en términos de una integral sobre θ únicamente:

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} iRe^{i\theta} e^{-R^2 \cos 2\theta} e^{-iR^2 \sin 2\theta} d\theta$$

Por tanto,

$$|I_2| \leq \int_0^{\pi/4} Re^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta$$

Por el teorema del valor medio, existe algún ángulo θ_0 dentro del intervalo de integración $[0, \pi/4]$ para el cual la integral es

$$\int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta = \frac{\pi}{4} R e^{-R^2 \cos 2\theta_0}$$

Pero en el límite $R \rightarrow \infty$ la expresión anterior se anula, luego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |I_2| = 0 \implies I_2 = 0$$

Finalmente, intentamos hallar I_3 . El segmento \mathcal{C}_ρ se puede parametrizar en la forma $z(t) = t(1+i)$ siendo el punto inicial $(1+i)R\sqrt{2}/2$ y el final, 0. Luego t varía entre $R\sqrt{2}/2$ y 0. Teniendo en cuenta que $z'(t) = 1+i$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{R\sqrt{2}/2}^0 e^{-[t(1+i)]^2} (1+i) dt \\ &= -(1+i) \int_0^{R\sqrt{2}/2} e^{-2it^2} dt \\ &= -(1+i) \left[\underbrace{\int_0^{R\sqrt{2}/2} \cos 2t^2 dt}_{I_C} - i \underbrace{\int_0^{R\sqrt{2}/2} \operatorname{sen} 2t^2 dt}_{I_S} \right] \\ &= -(I_C + I_S) + i(I_S - I_C) \end{aligned}$$

De la ecuación $I_1 + I_3 = 0$ derivamos dos condiciones en el límite $R \rightarrow \infty$, igualando partes reales e imaginarias:

$$\begin{aligned} I_C + I_S &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ I_C - I_S &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} 2t^2 dt = \int_0^\infty \cos 2t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Haciendo el cambio de variables $x = \sqrt{2}t$ llegamos al resultado final:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

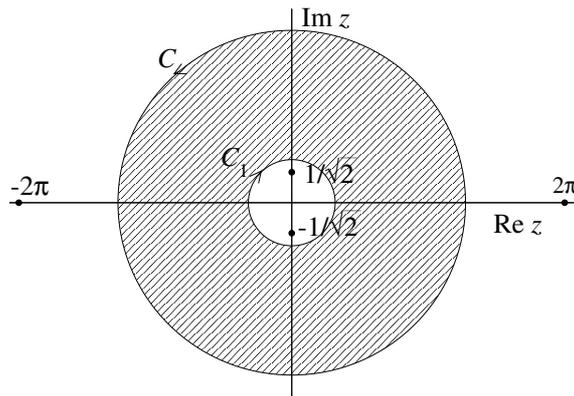


Figura 4.5: Ejemplo de dominio múltiplemente conexo cuya frontera orientada está formada por dos circunferencias.

▷ EJEMPLO. Calcular las integrales $I_1 = \int_{\mathcal{K}} \frac{dz}{2z^2 + 1}$ e $I_2 = \int_{\mathcal{K}} \frac{dz}{\operatorname{sen}(z/2)}$ donde $\mathcal{K} = \mathcal{C} + \mathcal{C}_1$ siendo \mathcal{C} la circunferencia $|z| = 4$ orientada positivamente y \mathcal{C}_1 la circunferencia $|z| = 1$ orientada negativamente tal y como indica la figura 4.5.

Se aplican las condiciones del teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos. Nótese que $f(z) = \frac{1}{2z^2 + 1}$ no es analítica en los puntos $z = \pm i/\sqrt{2}$, pero estos puntos están en el interior de \mathcal{C}_1 . Por tanto, $f(z)$ es analítica en el corona circular \mathcal{D} limitada por \mathcal{C} y \mathcal{C}_1 e $I_1 = 0$

Por otro lado, la función $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z/2)}$ también es analítica en \mathcal{D} , puesto que el denominador se anula en $z = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ y todos estos puntos no pertenecen a \mathcal{D} . En consecuencia, $I_2 = 0$.

4.4. Fórmula de Cauchy

En la sección anterior hemos acabado con ejemplos que ilustran la fuerza del teorema de Cauchy-Goursat para calcular integrales de funciones no triviales a lo largo de contornos arbitrarios. La ventaja sobre el método de parametrización es evidente. La única condición que se pide es que el integrando sea una función analítica. Ahora bien, las aplicaciones están limitadas a determinar si una integral se anula o no. Nos gustaría ir más allá y encontrar un método que nos diera el valor de la integral cualquiera que éste fuese y no sólo cuando fuera cero. Aunque la presentación general de este método se pospone al capítulo 6, Cauchy encontró

una fórmula que es extremadamente útil en muchas situaciones. Vamos a introducirla primero con un ejemplo:

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z - z_0}$ a lo largo de *cualquier* contorno simple cerrado \mathcal{C} alrededor del punto z_0 .

El integrando $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ no es obviamente analítico en el interior de \mathcal{C} ya que $f(z_0)$ no existe. Entonces, no podemos aplicar directamente el teorema de Cauchy-Goursat. Ahora bien, según el corolario del teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos, siempre podemos deformar el contorno y tomar el más simple. Escogemos una circunferencia de radio R centrada en z_0 con la siguiente parametrización:

$$\mathcal{C} : z(t) = z_0 + Re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \implies z'(t) = iRe^{it}$$

Entonces, usando el hecho de que $f(z(t)) = 1/Re^{it}$, podemos aplicar directamente la definición de integral compleja para calcular I :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = 2\pi i$$

Este ejemplo es importante, pues permite demostrar la siguiente teorema, que proporciona el valor de f en un punto *interior* al contorno \mathcal{C} en términos de una integral de línea:

Fórmula de Cauchy. Sea f analítica en el dominio simplemente conexo \mathcal{D} y sea \mathcal{C} un contorno dentro de \mathcal{D} . Si z_0 es interior a \mathcal{C} , entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Demostración. Una posible ilustración del teorema se muestra en la figura 4.6. Por el ejemplo anterior, podemos multiplicar a ambos lados de la solución por $f(z_0)$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$$

donde hemos deformado el contorno \mathcal{C} al contorno \mathcal{C}_1 definido como sigue (véase la figura 4.6):

$$\mathcal{C}_1 : |z - z_0| = \frac{\delta}{2}$$

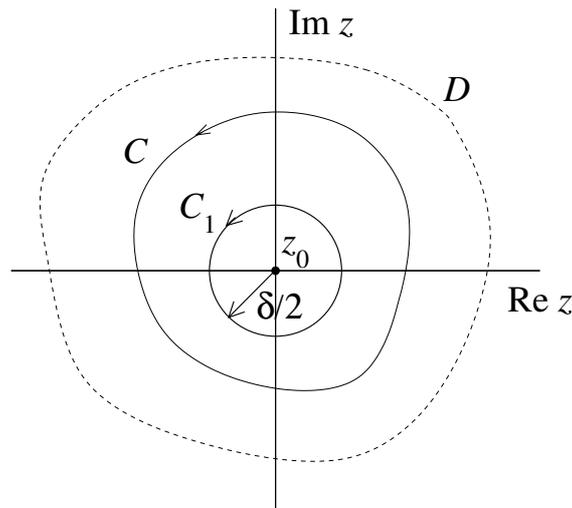


Figura 4.6: Deformación del contorno original.

Ahora bien, como f es analítica, entonces f es continua y, aplicando la definición de continuidad, sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ para $|z - z_0| < \delta$. Calculemos, entonces, el siguiente módulo:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\delta/2} \pi \delta = \varepsilon$$

donde hemos utilizado la propiedad 6 de las integrales de contorno (sección 4.2) siendo la longitud del contorno \mathcal{C}_1 igual a $L = \pi \delta$.

Como ε puede hacerse arbitrariamente pequeño, concluimos que el miembro izquierdo de la ecuación es cero y el teorema queda demostrado. \square

Nunca se ponderará suficientemente la importancia de la fórmula de la integral de Cauchy. Hay que tener en cuenta que establece el siguiente resultado crucial: conocida una función analítica f en un contorno simple cerrado \mathcal{C} , podemos reconstruir f en toda la región interior a \mathcal{C} aplicando reiteradamente la fórmula de Cauchy a cada punto dentro de \mathcal{C} . La fórmula también resulta útil para calcular ciertas integrales complicadas de forma rápida.

▷ EJEMPLO. Sea \mathcal{C} el cuadrado cuyos vértices están dados por los puntos 2 , $2i$, -2 y $-2i$. Hallar $I = \int_{\mathcal{C}} \frac{\operatorname{sen} z}{2z + \pi} dz$.

Sea $f(z) = \operatorname{sen} z$. Podemos reescribir la integral del siguiente modo:

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - (-\pi/2)} dz$$

f es analítica en el cuadrado \mathcal{C} y en su interior. Por otra parte, el punto $z_0 = -\pi/2$ está dentro de \mathcal{C} . Entonces, podemos aplicar directamente la fórmula de la integral de Cauchy:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - (-\pi/2)} dz = 2\pi i f(-\pi/2) = -2\pi i \implies I = \frac{1}{2}(-2\pi i) = -\pi i$$

▷ EJEMPLO. Sea \mathcal{C} la circunferencia centrada en el origen y de radio 2. Hallar

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{\cos z}{z(z^2 + 6)} dz$$

Observamos que los puntos singulares del integrando están en 0 y $\pm i\sqrt{6}$. Los dos últimos están fuera del círculo $|z| \leq 1$. Luego podemos definir la función $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 6}$, que es analítica en \mathcal{C} y dentro de \mathcal{C} , y recurrir a la fórmula de la integral de Cauchy:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = i\frac{\pi}{3}$$

▷ EJEMPLO. Hallar la expresión exacta del periodo del **péndulo no lineal**:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \operatorname{sen} \theta}, \quad a < \omega$$

Esta integral tiene fuertes implicaciones físicas: los osciladores no lineales aparecen en mecánica, electrónica, física de superconductores e incluso en fenómenos de sincronización de sistemas biológicos. Es conocido que el periodo de un péndulo uniforme es $T = 2\pi/\omega$ donde ω es la frecuencia. Ahora bien, esto es cierto solamente para oscilaciones pequeñas alrededor del punto de equilibrio porque entonces la componente horizontal de la tensión es proporcional al ángulo de desviación θ . Sin embargo, para ángulos no cercanos a 0, la fuerza es, en general, proporcional a $\operatorname{sen} \theta$ y la ecuación dinámica que obedece el movimiento pendular se vuelve no lineal. En la ecuación de arriba, a es el coeficiente de no linealidad.

De la misma forma que calculamos las integrales reales de Fresnel mediante un resultado de análisis complejo, ahora se utilizará la fórmula integral de Cauchy para calcular la integral real que define T . Comenzamos definiendo la variable compleja $z = e^{i\theta}$. Entonces, podemos aplicar la fórmula de Euler:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

Por otra parte, $dz = izd\theta$, transformándose, pues, una integral real en una integral en el plano complejo. El dominio sobre el que integrar es la circunferencia de radio unidad $\mathcal{C} : |z| = 1$ debido a la definición de z (θ varía entre 0 y 2π , y z tiene módulo unidad). Sustituimos la expresión de $\sin \theta$ y la de dz :

$$T = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\omega - \frac{a}{2iz}(z^2 - 1)} \frac{dz}{iz} = -\frac{2}{a} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2 - i\frac{2\omega}{a}z - 1}$$

Determinamos ahora las singularidades del integrando, buscando los ceros del denominador:

$$z_0^{\pm} = i\frac{\omega}{a} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}$$

Ahora bien, hemos pedido que $a < \omega$. Entonces, el radicando es negativo. Por tanto, el módulo de los ceros del denominador vale

$$|z_0^{\pm}| = \frac{\omega}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - 1}$$

Observamos que $|z_0^+| > 1$ y $|z_0^-| < 1$. Por tanto, podemos definir la función $f(z) = \frac{1}{z - z_0^+}$ que es analítica en \mathcal{C} y en todos los puntos dentro de \mathcal{C} .

El denominador del integrando es de la forma de la integral de Cauchy y podemos aplicar la fórmula directamente:

$$T = -\frac{2}{a} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0^-} dz = -\frac{2}{a} 2\pi i f(z_0^-)$$

Pero $f(z_0^-) = \frac{1}{z_0^- - z_0^+} = \frac{i}{2\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - 1}}$. Por tanto:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$

Esta fórmula reproduce el límite lineal $a \rightarrow 0$ (oscilador uniforme) y predice que el periodo diverge cuando $a \rightarrow \omega$. En efecto, cuando a es pequeño, el péndulo oscila alrededor del punto de equilibrio, pero, al aumentar a , al péndulo le cuesta cada vez más volver a ese punto y T diverge.

La fórmula de la integral de Cauchy nos proporciona $f(z_0)$ en \mathcal{D} si conocemos el valor de la función en la frontera \mathcal{C} de \mathcal{D} . Pero si derivamos bajo el signo de la integral, encontramos un método similar para hallar $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

De hecho, podemos seguir derivando para hallar la derivada enésima de f en z_0 . Por inducción se demuestra que ésta viene dada por la **fórmula de Cauchy generalizada**:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

donde hemos cambiado la variable muda z a w y z_0 ha sido renombrada como z para resaltar una consecuencia muy interesante:

Teorema. *Sea una función $f(z)$ analítica en z_0 . Entonces, sus derivadas existen a todo orden y son analíticas.*

Demostración. Como $f(z)$ es analítica en z_0 , f es derivable en una región alrededor de z_0 y existe, gracias a la fórmula de Cauchy generalizada, un contorno dentro del cual existen tanto $f'(z_0)$ como $f''(z_0)$. Pero si existe $f''(z_0)$, esto implica que $f'(z_0)$ es analítica en el mismo dominio. Entonces, podemos utilizar el mismo argumento para probar que, en general, $f^{(n)}(z)$ es analítica. \square

Este teorema es crucial para demostrar que toda función analítica puede expandirse en una serie de potencias ya que es *infinitamente derivable*. Este hecho no tiene necesariamente que ser cierto en \mathbb{R} . Por ejemplo, tómesese la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Es evidente que $f(x)$ es derivable en $x = 0$, pero sólo una vez, ya que $f''(0)$ no existe. Notablemente, en \mathbb{C} si una función es analítica y, por tanto, derivable una vez, es derivable infinitas veces. Este alcance *global* de las funciones de variable compleja conduce a resultados muy interesantes que veremos en el próximo capítulo.

4.5. Teorema de Morera

En los dos apartados anteriores hemos visto varios resultados importantes que se pueden resumir en la siguiente frase: *si una función f es analítica, entonces $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ es independiente del camino \mathcal{C} y f posee una primitiva*. Podemos entonces preguntarnos si existe la afirmación recíproca. La respuesta afirmativa la dio Morera en su famoso teorema:

Teorema. *Sea f continua en un dominio \mathcal{D} simplemente conexo. Si $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ para todo contorno cerrado $\mathcal{C} \in \mathcal{D}$, entonces f es analítica.*

Demostración. Como $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$, $\int_{\mathcal{C}_1} f(w) dw$ es independiente de cualquier contorno \mathcal{C}_1 que empiece en z_1 y acabe en z . Entonces, podemos definir la función

$$F(z) = \int_{z_1}^z f(w) dw$$

de donde se infiere $F'(z) = f(z)$. Según el último teorema de la sección anterior, la derivada de una función analítica es analítica. Luego f es analítica. \square

4.6. Cotas de funciones analíticas y el teorema fundamental del álgebra

Liouville demostró un teorema que ahondó más en las diferencias entre las funciones reales y las complejas.

Teorema. *Si f es entera y acotada, entonces f es constante.*

Demostración. Sea f una función acotada: $|f(z)| < M$. Aplicamos la desigualdad 6 de la sección 4.2 a la fórmula de Cauchy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

sobre la circunferencia $\mathcal{C} : w = z + Re^{i\theta}$ cuya longitud es $2\pi R$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

Pero la circunferencia la podemos hacer arbitrariamente grande ($R \rightarrow \infty$). Entonces $|f'(z)| \leq 0$ de donde se deduce que $f'(z) = 0$ y que f es constante. \square

Una función real puede estar acotada y ser derivable en todo \mathbb{R} y no tiene por qué ser constante. Por ejemplo, considérese la función $f(x) = \text{sen } x$, que está acotada ya que $|\text{sen } x| \leq 1$ y es derivable en todo \mathbb{R} . Sin embargo, en \mathbb{C} la función $\text{sen } z$ no está acotada aunque sí es entera.

La consecuencia más gratificante del teorema anterior es que nos permite probar de manera muy sencilla uno de los teoremas más importantes de toda las matemáticas:

Teorema fundamental del álgebra. *El polinomio de grado n*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

tiene n ceros (contando multiplicidades).

Demostración. Lo probamos por reducción al absurdo. La hipótesis de partida consiste en suponer que $p(z) \neq 0$ para todo z . Definimos ahora la función $f(z) = 1/p(z)$, que es entera (ya que hemos supuesto que $p(z) \neq 0$) y acotada puesto que

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \rightarrow 0 \quad \text{si } |z| \rightarrow \infty$$

Como $|f(z)|$ es continua, f está acotada en todo el plano y, por el teorema de Liouville, $f(z)$ debe ser una constante. Sin embargo, esto es una contradicción con nuestra hipótesis de partida. Luego no debe ser cierto que $p(z) \neq 0$; es decir, debe existir algún z_0 tal que $p(z_0) = 0$ para que f no sea entera y no se le pueda aplicar el teorema de Liouville. Entonces, habiendo probado que $p(z)$ tiene, al menos, un cero, factorizamos el término $(z - z_0)$ y consideramos el polinomio de grado $n - 1$ dado por

$$q(z) = \frac{p(z)}{z - z_0} = b_0 + b_1z + \dots + b_nz^{n-1} \quad b_n \neq 0, n \leq 1$$

Ahora repetimos todo el argumento anterior con una nueva función $g(z) = 1/q(z)$ con el objeto de demostrar que $q(z)$ tiene, al menos, una raíz. Sucesivamente, vamos bajando el grado del polinomio al mismo tiempo que añadimos un cero, por lo que $p(z)$ ha de tener necesariamente n ceros. \square

Otro ejemplo sobresaliente de las diferencias entre las funciones reales y las complejas es el siguiente teorema:

Teorema del módulo máximo. *Sea la función $f(z)$ no constante en el interior de un dominio cerrado \mathcal{D} . Si f es analítica en \mathcal{D} , entonces $|f(z)|$ adquiere su valor máximo en la frontera y nunca en su interior.*

Si se agrega a las hipótesis del teorema que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathcal{D}$, entonces $f(z)$ también adquiere su *mínimo* en \mathcal{C} .

Nótese que en \mathbb{R} las funciones continuas en un cierto intervalo $x \in [a, b]$ alcanzan su máximo en algún x de ese intervalo, pero no necesariamente en $x = a$ o $x = b$.⁴

▷ EJEMPLO. Hallar el módulo máximo de $f(z) = 2z + 6i$ en el círculo $|z| \leq 2$. Encontrar también el mínimo.

Determinamos el módulo de $f(z)$:

$$|f(z)|^2 = |2z + 6i|^2 = 4|z|^2 + 36 + 2\operatorname{Re}[2z(-6i)] = 4|z|^2 + 36 + 24\operatorname{Im}z$$

⁴ Véase, por ejemplo, *Cálculo infinitesimal*, M. Spivak, 2ª edición, Reverté (1990), página 152.

De acuerdo al teorema anterior, f alcanza su máximo en $|z| = 2$. Entonces, $|f(z)| = \sqrt{52 + 24\text{Im}z}$ para todos los z que pertenezcan a la circunferencia de radio 2 y centrada en el origen. Como el punto de la circunferencia que tiene la parte imaginaria más grande es $z = 2i$, concluimos que el máximo de $|f(z)|$ es:

$$|f(z)|_{\max} = |f(2i)| = \sqrt{100} = 10$$

La función $f(z)$ se anula en $z = -3i$, que está fuera de la región considerada. Entonces, se satisfacen las condiciones del teorema y el mínimo ocurre también en la frontera, en el punto que tiene la parte imaginaria más pequeña, es decir, $z = -2i$:

$$|f(z)|_{\min} = |f(-2i)| = \sqrt{4} = 2$$

4.7. Aplicación: Relaciones de dispersión y principio de causalidad

Consideremos una función $f(z)$ analítica en el semiplano superior $\mathcal{D} : \text{Im}z \geq 0$ (incluido el eje real). Supongamos, además, que $|f(z)|$ está acotada en el infinito,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$$

Esta condición ocurre con frecuencia en Física. Por ejemplo, el índice de refracción, la permitividad o la susceptibilidad óptica suelen tener el siguiente comportamiento asintótico con la frecuencia compleja ω :

$$|f(\omega)| \leq \frac{\text{const.}}{|\omega|^\alpha}$$

donde $\alpha > 0$.

Gracias a la fórmula integral de Cauchy podemos escribir la función f en el punto $z_0 \in \mathcal{D}$ en términos de la integral de contorno

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Pero como $|f(z)|$ se anula en el infinito, la integral a lo largo del arco superior que define \mathcal{D} se hace cero y sólo contribuye a $f(z_0)$ la integral a lo largo del eje real:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z_0} dx$$

Este resultado es cierto siempre que $\text{Im } z > 0$. En el caso que z_0 esté localizado en el exterior del contorno \mathcal{C} ($\text{Im } z < 0$), la función $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ será analítica en \mathcal{C} y en su interior de forma que la integral de arriba es cero: $f(z_0) = 0$ si $\text{Im } z_0 < 0$.

Veremos en el capítulo 6 que, cuando z_0 se sitúa exactamente sobre el eje x ($\text{Im } z_0 = 0$), se obtiene

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

donde $x_0 = \text{Re } z_0$. Ahora descomponemos f en parte real y parte imaginaria:

$$u(x_0) + iv(x_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x) + iv(x)}{x - x_0} dx$$

de donde deducimos las ecuaciones

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x - x_0} dx \\ v(x_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x - x_0} dx \end{aligned}$$

que se denominan **relaciones de dispersión de Kramers-Kronig**⁵. Sorprendentemente, implican que si sólo conocemos la parte real de una función analítica, entonces podemos hallar su parte imaginaria (y viceversa) en todo \mathbb{R} sin más que calcular la integral correspondiente. Éste es un ejemplo más del alcance global de las funciones analíticas.

Las relaciones de Kramers-Kronig se aplican a funciones respuesta, por ejemplo, a la función dieléctrica $\varepsilon(\omega)$, que describe la respuesta de un medio conductor a perturbaciones electromagnéticas en función de la frecuencia ω . $\text{Re } \varepsilon$ nos aporta información sobre la *dispersión* de las ondas en el medio mientras que de $\text{Im } \varepsilon$ extraemos la *absorción* de las ondas en el conductor. Puesto que ε es una función acotada y analítica, se cumplen las condiciones que dan lugar a las relaciones de Kramers-Kronig y, por tanto, realizando una medida experimental de dispersión, se puede inferir, *sin conocerlo de antemano*, el espectro de absorción de un conductor.

La razón última de la validez de las relaciones de Kramers-Kronig hay que buscarla en el principio de causalidad. Sea $F(t)$ una fuerza (la *causa*) que actúa sobre un cuerpo a tiempo $t > 0$. Entonces, la teoría de respuesta lineal establece que el *efecto* denotado como $P(t)$ a $t > 0$ viene dado por

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - t') F(t') dt'$$

⁵ Este resultado fue demostrado por primera vez por Sokhotski y Plemelj.

donde $\chi(t - t')$ es la función respuesta. Claramente, el sistema no puede responder hasta que no se acople con $F(t)$, deduciéndose que $\chi(t - t') = 0$ para $t < t'$. Ésta es la condición de causalidad. El teorema de Titchmarsh afirma que si la función $\tilde{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ es cuadrado integrable (esto es, si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\chi}(\omega)|^2 d\omega$ es finita) entonces el principio de causalidad y las relaciones de Kramers-Kronig son equivalentes (es decir, un resultado implica el otro y viceversa). Al final del capítulo 6 profundizaremos en esta relación mediante el análisis de un ejemplo concreto de interés físico.

4.8. Problemas resueltos

- PROBLEMA. Sea \mathcal{C} el segmento de recta que une los puntos $z_0 = -i$ y $z_1 = i$.

(a) Calcular la integral

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

siendo $f = 3z^2$.

(b) Dado que f es analítica, razonar si esto acarrea una contradicción con el Teorema de Cauchy-Goursat.

Solución. (a) Puesto que f es analítica, posee una primitiva, que es z^3 y no hace falta parametrizar el segmento de recta ya que I sólo depende del punto inicial y el punto final:

$$I = z^3 \Big|_{-i}^i = -2i$$

(b) No existe contradicción alguna, ya que el teorema de Cauchy-Goursat afirma que $I = 0$ para funciones analíticas *a lo largo de contornos cerrados*, y el segmento de recta \mathcal{C} no es un contorno cerrado.

- PROBLEMA. Se define la función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente forma:

$$f(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\sinh^2(w/2)}{(w-z)^2} dw,$$

siendo \mathcal{C} el contorno descrito por la ecuación $|w| = 2$.

- (a) Hallar el valor de $f(i\pi/2)$, simplificando todo lo que se pueda.
 (b) Razonar si f es analítica en el origen y, en caso afirmativo, dar el valor de $f'(0)$.
 (c) Determinar $f(z)$ para todo z tal que $|z| > 2$.

Solución. (a) Sea la función $g(w) = \sinh^2(w/2)$, que es analítica en \mathcal{C} y dentro de \mathcal{C} . Entonces, para todo z interior a \mathcal{C} , podemos hacer uso de la fórmula generalizada de Cauchy,

$$f(z) = 2\pi i g'(z) = 2\pi i \sinh \frac{z}{2} \cosh \frac{z}{2} = \pi i \sinh z$$

El punto $z = i\pi/2$ es interior a \mathcal{C} . Luego

$$f(i\pi/2) = \pi i \sinh(\pi i/2) = -\pi \sin(\pi/2) = -\pi$$

(b) Para todo z interior a \mathcal{C} , f es una función analítica. Toda función analítica posee derivadas a todo orden, y éstas son analíticas. Como el origen está dentro de \mathcal{C} , f es analítica en $z = 0$. Calculamos la primera derivada de f :

$$f'(z) = 2\pi i g''(z) = \pi i \cosh z$$

En consecuencia, $f'(0) = \pi i$.

(c) Cuando z está fuera del contorno \mathcal{C} , el integrando es una función analítica en \mathcal{C} y dentro de \mathcal{C} . Se deduce del teorema de Cauchy-Goursat que la integral se anula y, por tanto, $f(z) = 0$ para todo $|z| > 2$.

4.9. Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales, siendo \mathcal{C} el segmento de recta que va desde $-1 - i$ a $1 + i$:

$$a) \int_{\mathcal{C}} [(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2] dz$$

$$b) \int_{\mathcal{C}} \left(\cosh \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2} + i \sinh \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2} \right) dz$$

2. Calcular las siguientes integrales, siendo \mathcal{C} la circunferencia de radio unidad recorrida en sentido antihorario:

$$a) \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^3 + 4z}$$

$$b) \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^*}$$

$$c) \int_{\mathcal{C}} \frac{\sinh z^2}{z^3} dz$$

$$d) \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z - z - 1}{z^2} dz$$

$$e) \int_{\mathcal{C}} \frac{z^* \operatorname{sen} z}{z} dz$$

3. Sea

$$\operatorname{Re} f = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} - y$$

Determinar $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ donde \mathcal{C} es el cuadrado de vértices $-i, 2-i, 2+i, i$, orientado positivamente.

4. Sea $p(z)$ un polinomio de orden n con coeficientes reales. Demostrar que si z es solución de la ecuación $p(z) = 0$, entonces su conjugado z^* también lo es⁶.
5. Hallar los módulos máximo y mínimo de $f(z) = 2z + 5i$ en el círculo $|z| \leq 2$.

4.10. Nota histórica

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés extraordinariamente prolífico. Publicó siete libros y más de ochocientos artículos, una marca sólo superada por Euler. En 1814 presentó la teoría de funciones complejas en un trabajo sin una sola figura ni un razonamiento geométrico.



⁶ Esto implica que las raíces complejas de una ecuación polinómica con coeficientes reales siempre vienen de dos en dos. Por ejemplo, una ecuación cúbica tiene o tres raíces reales o una raíz real y dos complejas, pero nunca dos raíces reales y una compleja.

EL PRINCIPAL OBJETIVO de este capítulo es establecer un método que facilite la expansión en serie de potencias para funciones complejas. Después de un breve repaso a los criterios de convergencia, enunciaremos el teorema de Taylor. De mayor importancia es el teorema de Laurent, que permite expandir una función compleja en potencias con exponentes negativos. Finalizaremos el capítulo con una exposición introductoria al importante tema de la continuación analítica.

5.1. Sucesiones y criterios de convergencia

Definición. Una **sucesión** $\{z_n\} = z_1, z_2, \dots, z_N$ donde $z_n \in \mathbb{C}$ con $n = 1, 2, \dots, N$ tiende al límite $w \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 > 0$ tal que $|z_n - w| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. También se dice que la sucesión es **convergente** o que converge a w :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$$

Definición. Una sucesión es **divergente** si no es convergente.

▷ EJEMPLO. Indicar si la sucesión $z_n = i^n$ es convergente o divergente.

Calculamos unos cuantos términos:

$$z_n = i, -1, -i, 1, i, \dots$$

Claramente, la sucesión es divergente puesto que tras el término z_4 la sucesión vuelve a repetirse. El hecho de que utilicemos la denominación «divergente» *no* quiere decir que la sucesión tienda a $\pm\infty$ sino, simplemente, que no converge a w .

El siguiente teorema, que damos sin demostrar, implica la equivalencia entre límites igualando parte real y parte imaginaria

Teorema. Sea la sucesión $z_n = x_n + iy_n$ y el número $w = a + ib$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$$

Definición. Dada una sucesión $\{z_n\}$, se dice que es **sumable** si existe el límite

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N z_n$$

donde S es la suma de la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. También se dice que si S existe, entonces la serie converge o que es convergente. Al igual que las sucesiones, si una serie no converge, entonces es divergente.

¿Cuándo converge una serie dada? A veces, no es posible contestar a esta pregunta, pero, por lo general, disponemos de varios criterios que nos ayudan. El primero se basa en la definición de convergencia de una sucesión dada más arriba:

CRITERIO DEL RESTO.—Si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diverge.

▷ EJEMPLO. Determinar si $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{i^n}$ converge.

S diverge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{i^n} \neq 0$. Nótese que el numerador siempre crece al aumentar n , pero el denominador permanece acotado: $i, -1, -i, 1, \dots$

▷ EJEMPLO. Determinar si $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2i}{5n}$ converge.

S diverge ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2i}{5n} = \frac{1}{5} \neq 0$.

Definición. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge. Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es **condicionalmente convergente**.

El criterio del resto nos decía cuándo una serie divergía, pero quizá son más útiles los criterios *positivos*, que indican la convergencia de una serie. Vamos a ver ahora dos criterios de esta clase.

CRITERIO DEL COCIENTE.—Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos tales que $z_n \neq 0$ para todo n y sea $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$.

$$\text{Si } \begin{cases} \ell < 1, & \text{la serie converge absolutamente} \\ \ell > 1, & \text{la serie diverge} \\ \ell = 1, & \text{la serie puede converger o divergir} \end{cases}$$

▷ EJEMPLO. Determinar si la serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$ converge.

Primero, aplicamos el criterio del resto. Vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (i/2)^n = 0$ ya que el numerador permanece acotado al aumentar n mientras que el denominador se hace cada vez más grande. Por tanto, S puede converger o divergir. Aplicamos ahora el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^{n+1}/2^{n+1}}{i^n/2^n} \right| = \left| \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

Luego S converge absolutamente.

CRITERIO DE LA RAÍZ.—Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos tales que $z_n \neq 0$ para todo n y sea $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \ell < 1, & \text{la serie converge absolutamente} \\ \ell > 1, & \text{la serie diverge} \\ \ell = 1, & \text{la serie puede converger o divergir} \end{cases}$$

▷ EJEMPLO. Determinar si la serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+2i}\right)^n$ converge.

Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{(\sqrt{5})^n} \right)^{1/n} = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$$

Luego S converge.

5.2. Series de potencias

Las series de potencias son un tipo particular de series de especial importancia, pues cualquier función analítica puede representarse por medio de términos del tipo

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Veamos, entonces, las propiedades que cumplen las series de potencias:

1. $S(z)$ puede integrarse término a término, es decir,

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathcal{C}} f(z) (z - z_0)^n dz$$

donde $f(z)$ es una función continua en \mathcal{C} .

2. En particular, si $f(z) = 1$, de acuerdo con la propiedad anterior, tenemos que

$$\oint_{\mathcal{C}} S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_{\mathcal{C}} (z - z_0)^n dz = 0$$

Como el resultado anterior es válido para todo contorno \mathcal{C} , por el teorema de Morera deducimos que S es analítica en todo el dominio de definición.

3. $S(z)$ puede derivarse término a término:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

4. Dos series pueden sumarse y restarse. Asimismo, pueden multiplicarse y dividirse con cuidado.

Quizá la serie de potencias más utilizada es la **serie geométrica** cuya suma puede calcularse exactamente:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

Para analizar la convergencia de S , hacemos uso del criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = |z|$$

Luego S converge en el interior del círculo de radio unidad ($|z| < 1$) y diverge fuera de él.

5.3. Series de Taylor

Teorema. Sea $f(z)$ analítica en el círculo $\mathcal{D}: |z - z_0| < R$. Entonces, f admite un desarrollo en **serie de potencias** en cada punto z dentro de \mathcal{D} :

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

La serie converge a $f(z)$ para $|z - z_0| < R$.

Demostración. Armados con la propiedad 1, nos proponemos demostrar el teorema de Taylor. Por la fórmula de la integral de Cauchy, sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Reescribimos primero el denominador del integrando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

La expresión anterior es válida para $\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1$. Integramos ahora término a término:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw}_{a_n} (z - z_0)^n$$

Luego $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Vamos a investigar ahora la forma de los coeficientes a_n . Podemos utilizar la propiedad 3 y derivar término a término la serie de potencias obtenida:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \implies f'(z_0) = 1 \cdot a_1 \\ f''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z - z_0)^{n-2} \implies f''(z_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por inducción, es fácil ver que $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$ o bien $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, con lo que el teorema de Taylor queda demostrado.

Nótese que, si sustituimos la expresión de a_n hallada anteriormente, obtenemos

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \quad n = 0, 1, \dots$$

que es, como ya sabemos, la fórmula de Cauchy generalizada. \square

Es conveniente recordar dos características notables de la serie de Taylor: primero, es única; y, segundo, siempre existe, debido a que la función f es analítica y, por tanto, infinitamente derivable.

El radio de convergencia R de la serie puede tomar los siguientes valores:

- $R = 0 \implies$ la serie de Taylor converge sólo en $z = z_0$.
- $0 < R < \infty \implies$ la serie de Taylor converge en $|z - z_0| < R$ y diverge para $|z - z_0| > R$.
- $R = \infty \implies$ la serie de Taylor converge en todo el plano.

Estas propiedades se deducen de aplicar el criterio del cociente directamente a la serie de Taylor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{a_n(z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Como $|z - z_0| < R$ por hipótesis del teorema, tenemos que $R = 1/\ell$ donde

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

▷ EJEMPLO. Hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Los coeficientes de la serie son $a_n = 1/n!$ Por tanto,

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Por la definición de arriba, $R = 1/\ell = \infty$. Luego la serie converge en todo \mathbb{C} . Esto es así porque la serie corresponde a la función exponencial,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

como se puede comprobar sin más que derivar sucesivamente. Ahora bien, $f(z) = e^z$ es entera, de ahí que su serie de potencias converja en todo \mathbb{C} .

- ▷ EJEMPLO. Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} (z - 1 - i)^n$.

La serie está centrada en $z_0 = 1 + i$. Hallamos R como en el ejemplo anterior:

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n2^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Luego $R = 1/\ell = 2$ y la serie converge para $|z - 1 - i| < 2$.

En muchas ocasiones, el desarrollo en serie de Taylor de una función en f es un proceso largo y tedioso que involucra derivadas sucesivas de f . Por ello, a veces es preferible seguir un procedimiento mucho más directo, usando las propiedades de las series de potencias enunciadas antes. Veamos un par de ejemplos.

- ▷ EJEMPLO. Hallar la expansión en serie de Taylor de la función $f(z) = \frac{z}{1-z}$ alrededor de $z_0 = 0$.

Aquí se da uno cuenta de que el denominador se parece a la serie geométrica que hemos visto antes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Entonces, simplemente multiplicamos ambos lados de la ecuación por z y obtenemos el resultado deseado:

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

- ▷ EJEMPLO. Hallar la serie de Taylor asociada a la función $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$.

Puesto que conocemos la serie geométrica $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, sólo tenemos que derivar (propiedad 3 de las series de potencias):

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$$

El siguiente ejemplo sigue la misma estrategia que los anteriores, pero el resultado final es sorprendente:

▷ EJEMPLO. Determinar la serie de Taylor alrededor del origen de la función

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3}.$$

La función f no es analítica en $z_0 = 0$. Luego se viola una de las condiciones del teorema de Taylor y la expansión en serie de potencias no existe. Sin embargo, podemos hacer caso omiso del teorema e investigar, de todas formas, qué ocurre si empleamos la fórmula de las series geométricas. Para ello, descomponemos f del siguiente modo:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1+2z}{1+z} = \frac{1}{z^2} \left(2 - \frac{1}{1+z} \right)$$

La función $\frac{1}{1+z}$ es susceptible de ser expandida por el método de las series geométricas:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} (2 - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots) \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - \dots \end{aligned}$$

Nótese que hemos encontrado una expansión en serie de potencias para $f(z)$ en la que están involucradas potencias con exponentes *negativos*, tales como z^{-2} y z^{-1} . Las expansiones que permiten estos términos forman el objeto de la siguiente sección.

5.4. Series de Laurent

El ejemplo último de la sección anterior sugiere que, aunque $f(z)$ no sea analítica, se puede encontrar un desarrollo en serie de potencias siempre y cuando permitamos potencias positivas y negativas.

Teorema de Laurent. Si $f(z)$ es analítica en los contornos \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 y en toda la región anular comprendida entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 , entonces f admite un desarrollo en serie para todo z de esa región:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

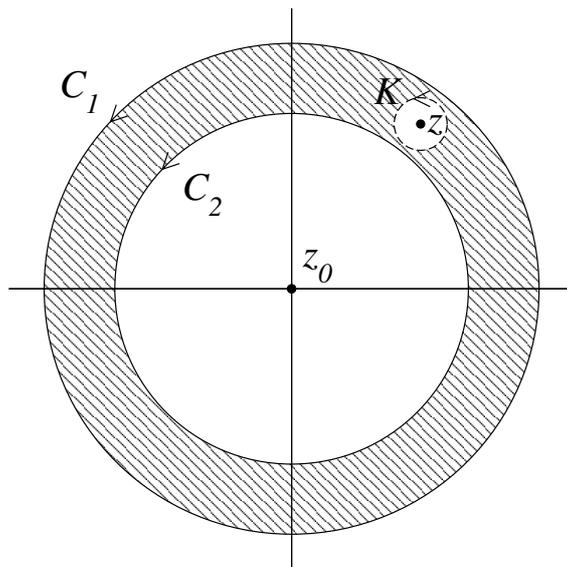


Figura 5.1: Contornos para la demostración del teorema de Laurent.

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw$$

Demostración. Sea $g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$ una función analítica en todo el dominio anular entre \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 excepto en el punto $w = z$, que rodeamos con el contorno \mathcal{H} (véase la figura 5.1). Entonces, por el teorema de Cauchy-Goursat extendido a dominios múltiplemente conexos, sabemos que

$$\int_{\mathcal{B}} g(w) dw = 0$$

donde $\mathcal{B} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 - \mathcal{H}$. Por la fórmula de la integral de Cauchy, la integral a lo largo de \mathcal{H} es simplemente $2\pi i f(z)$. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z)$$

Deseamos hacer una expansión en potencias de $z - z_0$. Entonces, seguimos la misma estrategia que en la demostración de las series de Taylor y reescribimos el

denominador de $g(w)$ en la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= \frac{1}{w-z_0} \left[1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado la fórmula de las series geométricas, $\frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n$, válida para $|s| < 1$. Como en este caso $s = (z-z_0)/(w-z_0)$, se tiene que cumplir que $|(z-z_0)/(w-z_0)| < 1$, lo cual es cierto para \mathcal{C}_1 . Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z_0} \left[1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^2 + \dots \right] dw \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z_0} dw + (z-z_0) \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2} dw + (z-z_0)^2 \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^3} dw + \dots\end{aligned}$$

Esta serie genera los términos $(z-z_0)^n$ y es fácil ver, identificando término a término, que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$$

Por otro lado, podemos seguir el mismo procedimiento para la integral a lo largo de \mathcal{C}_2 , donde ahora se cumple que $|(w-z_0)/(z-z_0)| < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}-\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \left[1 + \frac{w-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos la siguiente serie:

$$\begin{aligned}-\int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{z-z_0} \left[1 + \frac{w-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^2 + \dots \right] dw \\ &= (z-z_0)^{-1} \int_{\mathcal{C}_2} f(w) dw + (z-z_0)^{-2} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-1}} dw \\ &\quad + (z-z_0)^{-3} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-2}} dw + \dots\end{aligned}$$

que identificamos con los términos $(z-z_0)^{-n}$ cuyos coeficientes son

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw \quad \square$$

A diferencia de un desarrollo en serie de Taylor, donde el radio de convergencia R es, como mucho, la distancia desde z_0 al punto singular más próximo, el teorema de Laurent permite un desarrollo en serie de potencias *alrededor de un punto singular*. Las diferencias con las series de Taylor las resume el término

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

que recibe el nombre de **parte principal**. Por supuesto, si f es analítica en z_0 , entonces $b_n = 0$ según el teorema de Cauchy-Goursat y recuperamos la serie de Taylor. Un rasgo que sí que comparten las series de Laurent y la de Taylor es que son únicas. Esto implica que es indiferente el método que usemos para calcular la serie de Laurent asociada a una función $f(z)$: una vez que la hayamos encontrado, el principio de unicidad nos asegura que ésta es la buena.

Nótese la forma particular del coeficiente b_1 :

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} f(z) dz$$

Esta expresión es válida *para cualquier contorno cerrado \mathcal{C}_2 que rodee a una singularidad $z = z_0$* . La observación que acabamos de hacer es la base del teorema de los residuos, que veremos con más detenimiento en el próximo capítulo.

▷ EJEMPLO. Hallar la serie de Laurent de $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$.

El único punto singular de f es $z_0 = 0$. La forma más rápida de calcular la serie de Laurent es tomar la expansión de $\operatorname{sen} z$ alrededor de $z_0 = 0$ y dividir por z^2 término a término:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots$$

que es válida para todo $z \neq 0$. Observamos que la contribución a la serie de Laurent de la singularidad es mayor cuanto más cerca estemos de z_0 .

En el ejemplo anterior había una sola singularidad. ¿Cómo abordamos un problema con dos o más singularidades? El ejemplo siguiente ilustra el método a seguir:

▷ EJEMPLO. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Hallar la serie de Laurent.

La función f presenta dos singularidades: una en $z_0 = 0$ y otra en $z_1 = 1$. Por tanto, dividimos el plano \mathbb{C} en dos regiones en las que f sea analítica. La primera es $\mathcal{D}_0 : 0 < |z| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1+z+z^2+\dots) \\ &= -(z^{-1} + 1 + z^1 + z^2 + \dots) = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

El segundo dominio es $\mathcal{D}_1 : |z| > 1$, donde f también es analítica. Manipulamos un poco el denominador para poder aplicar la fórmula de las series geométricas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z^2} (1+z^{-1}+z^{-2}+\dots) = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores hemos expandido alrededor de $z_0 = 0$. Veamos ahora un ejemplo del procedimiento para hallar un desarrollo en serie de potencias alrededor de un punto distinto del origen:

▷ EJEMPLO. Expandir $f(z) = \frac{1}{z}$ en potencias de $(z-1)$ en el dominio $|z-1| > 1$.

Igual que en los ejemplos anteriores, se trata de manipular el denominador hasta que obtengamos la forma asociada a las series geométricas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= -\frac{1}{-z} = -\frac{1}{1-z-1} = -\frac{1}{1-z} \frac{1}{1-\frac{1}{1-z}} \\ &= -(1-z)^{-1} [1 + (1-z)^{-1} + (1-z)^{-2} + \dots] = -\sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{-n} \end{aligned}$$

5.5. Aplicación: Continuación analítica

El ejemplo más espectacular del alcance global de las funciones analíticas lo constituye el tema de la continuación, extensión o prolongación analítica.

Definición. Sea $g(z)$ una función analítica en el dominio \mathcal{D} . Se dice que $f(z)$ es una **continuación analítica** de $g(z)$ si f es analítica en un dominio más grande que \mathcal{D} y, además, los valores de $f(z)$ coinciden con los de $g(z)$ en todos los puntos $z \in \mathcal{D}$.

De alguna forma, ya hicimos uso de este concepto en el capítulo 2 cuando extendimos las funciones reales e^x , $\operatorname{sen} x$, etc., que son analíticas en el eje real, a todo el plano complejo \mathbb{C} , obteniéndose $\exp z$, $\operatorname{sen} z$, etc.

¿Es siempre posible prolongar analíticamente una función indefinidamente y en todo \mathbb{C} ? En general, no, ya que pueden existir singularidades o puntos de rama que definan una frontera más allá de la cual no sea posible encontrar una continuación analítica. Sin embargo, utilizando los conocimientos desarrollados en este capítulo, se puede proponer un método muy ingenioso que funciona siempre que los puntos singulares de la función sean aislados.

Sea una función $f(z)$ analítica en $z = z_0$. Entonces, siempre podemos construir una expansión en series de Taylor alrededor de z_0 y con un cierto radio de convergencia que viene dado por la distancia a la singularidad más cercana. Denotemos esta singularidad como $z = w$. La expansión es válida dentro del círculo $\mathcal{D} : |z - z_0| < |z_0 - w|$. La serie de Taylor da los valores de $f(z)$ en todos los puntos $z \in \mathcal{D}$. Escojamos un punto z_1 cerca de la frontera de \mathcal{D} . Entonces, podemos de nuevo expandir $f(z)$ tomando ahora como centro del desarrollo de Taylor el punto $z = z_1$, que tendrá un radio de convergencia distinto al anterior, $\mathcal{D}_1 : |z - z_1| < |z_1 - w|$. Evidentemente, hay un solape entre \mathcal{D} y \mathcal{D}_1 , pero lo interesante es darse cuenta de que merced a la nueva expansión, hemos extendido el dominio de analiticidad de f de \mathcal{D} a $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1$. Uno puede continuar con este método hasta cubrir todo el plano \mathbb{C} *excepto el punto* $z = w$ ¹. Así pues, es posible reconstruir la función $f(z)$ en todo \mathbb{C} a partir únicamente de sus valores en un dominio finito \mathcal{D} . Tal alcance es posible gracias a que la función es analítica. Por tanto, concluimos que los valores de una función analítica en cualquier región finita del plano determinan, mediante continuación analítica, sus valores en todo \mathbb{C} .

▷ EJEMPLO. Sea $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Hallar la continuación analítica de f más allá del círculo de convergencia $|z| < 1$.

La función f tiene una singularidad en $z = 1$. La expansión alrededor del origen,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$$

es válida para en el dominio $\mathcal{D} : |z| < 1$ tal y como se muestra en la figura 5.2. Sin embargo, sabemos que f es analítica fuera de \mathcal{D} . Una posible prolongación consiste en tomar el punto $z = i$ como centro de una segunda

¹ Si la función es multivaluada, cabe la posibilidad de que, al volver al punto de partida, no se recuperen los valores originales. Entonces, hay que extender el concepto de plano complejo para incluir diferentes niveles o *superficies de Riemann*.

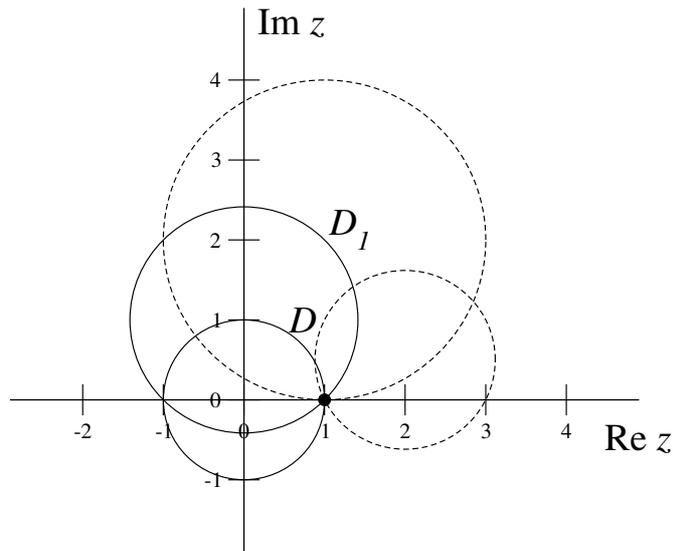


Figura 5.2: Ejemplo de continuación analítica.

expansión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{(1-i)-(z-i)} = -\frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \\ &= -\frac{1}{1-i} \left[1 + \frac{z-i}{1-i} + \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^2 \dots \right] \end{aligned}$$

válida en el círculo $\mathcal{D}_1 : |z-i| < |i-1| = \sqrt{2}$. Nótese que hemos ampliado el dominio de convergencia y que las dos expansiones dan los mismos valores en la región de solape entre \mathcal{D} y \mathcal{D}_1 . Así, tomando puntos cada vez más alejados del origen como centro de la expansión (véanse las circunferencias a trazos de la figura 5.2), seríamos capaces de continuar f analíticamente en todo \mathbb{C} excepto en la singularidad $z = 1$.

Contrariamente a lo que se pueda pensar, la continuación analítica, aunque parezca un concepto demasiado abstracto, encuentra aplicaciones muy interesantes en Física teórica. Por poner un ejemplo concreto, considérese la propagación de un electrón con energía E en un cristal unidimensional. Supongamos que existe una impureza localizada en el origen de energía potencial V . Si el electrón incide en la impureza, tiene una cierta posibilidad de reflejarse o transmitirse. Del cálculo mecanocuántico se deriva la siguiente expresión para la amplitud de dispersión:

$$f(E) = -\frac{V}{V - i\sqrt{4 - E^2}}$$

La energía electrónica está restringida al intervalo $-2 < E < 2$ (es lo que se denomina una *banda* electrónica). Pero supongamos que no hacemos caso de esta restricción y continuamos analíticamente la función $f(E)$ en el intervalo $|E| > 2$. Entonces, f adquiere la forma

$$f(E) = -\frac{V}{V + \sqrt{E^2 - 4}}$$

Ahora bien, existe un resultado conocido de la teoría de dispersión cuántica que afirma que una divergencia en f va siempre asociada con la existencia de un *estado ligado*. Efectivamente, si $V < 0$ (impureza con potencial atractivo) existe una energía discreta (y no una banda) para la cual el denominador de f se anula. Intuitivamente, es como si lanzáramos un electrón contra el potencial y aquél quedara atrapado. Este ejemplo concreto permite hacernos una idea de que la continuación analítica es una herramienta muy poderosa para analizar ciertos procesos de dispersión de partículas.

5.6. Problemas resueltos

□ PROBLEMA. Sea la función compleja

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$$

Hallar la serie de Laurent asociada a f en el dominio $\mathcal{D} : 0 < |z+1| < 1$.

Solución.

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+1)^{-2} \frac{1}{z} = -(z+1)^{-2} \frac{1}{1-(z+1)} \\ &= -(z+1)^{-2} [1 + (z+1) + (z+1)^2 + (z+1)^3 + \dots] = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^{n-2} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la serie geométrica de $1/[1-(z+1)]$, válida para $|z+1| < 1$, que corresponde justamente al dominio del enunciado.

□ PROBLEMA. Sea la función compleja

$$f(z) = \frac{1}{(3z+2)(2-z)}$$

Calcular la serie de Laurent en $\mathcal{D} : 0 < |z + \frac{2}{3}| < \frac{8}{3}$.

Solución. Dentro del dominio \mathcal{D} , sólo hay una singularidad: $z = -2/3$. Primero, reescribimos $1/(2-z)$ para poder desarrollarla en potencias de $z + \frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2 - \left(z + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}} = \frac{3}{8} \frac{1}{1 - \left(\frac{z+2/3}{8/3}\right)}$$

Ahora utilizamos la serie geométrica:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z+2/3}{8/3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2/3}{8/3}\right)^n$$

válida para $\left|z + \frac{2}{3}\right| < \frac{8}{3}$. Sustituimos en la expresión de $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \left(z + \frac{2}{3}\right)^{-1} \frac{3}{8} \left[1 + \frac{z+2/3}{8/3} + \left(\frac{z+2/3}{8/3}\right)^2 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(z + \frac{2}{3}\right)^{-1} + \frac{3}{8} + \frac{z+2/3}{(8/3)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

□ PROBLEMA. Hallar la serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z \operatorname{sen} z}{(z - \pi)^3}$$

especificando el dominio de aplicabilidad.

Solución. Como sólo existe una singularidad, la serie de Laurent será válida en todo el plano complejo excepto en $z = \pi$. Puesto que $\operatorname{sen}(z - \pi) = -\operatorname{sen} z$, podemos escribir

$$f(z) = -\frac{z \operatorname{sen}(z - \pi)}{(z - \pi)^3} = -\frac{(z - \pi) \operatorname{sen}(z - \pi)}{(z - \pi)^3} - \frac{\pi \operatorname{sen}(z - \pi)}{(z - \pi)^3}$$

y, a continuación, expandimos:

$$\begin{aligned} f(z) &= -(z - \pi)^{-2} \left[(z - \pi) - \frac{(z - \pi)^3}{3!} + \dots \right] \\ &\quad - \pi (z - \pi)^{-3} \left[(z - \pi) - \frac{(z - \pi)^3}{3!} + \dots \right] \\ &= -(z - \pi)^{-1} + \frac{z - \pi}{3!} - \dots - \pi (z - \pi)^{-2} + \frac{\pi}{3!} - \dots \end{aligned}$$

5.7. Ejercicios

1. Expandir $f(z) = \frac{z-1}{3-z}$ en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 1$ y dar el radio de convergencia.
2. Hallar las series de Laurent asociadas a las siguientes funciones en los dominios especificados:
 - a) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ para $0 < |z-1| < 1$ y $|z-1| > 1$
 - b) $f(z) = \frac{1}{z(4-z)^2}$ para $0 < |z| < 4$
 - c) $f(z) = \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z}$ para $z \neq 0$
 - d) $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2 + 1)}$ para $1 < |z| < 2$
3. Sea $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$. Estudiar el dominio de analiticidad y calcular, si es posible, el desarrollo en serie de Taylor alrededor del origen especificando el radio de convergencia. Razonar si f tiene primitiva y, en caso afirmativo, dar los cuatro primeros términos de la serie de Taylor asociada a su primitiva.

5.8. Nota histórica

Pierre Alphonse Laurent (1813-1854) fue un matemático francés. Al igual que Cauchy, estudió ingeniería antes de pasarse a las matemáticas. Descubrió la expansión en serie de potencias de las funciones complejas, pero, incomprensiblemente, la Academia de Ciencias francesa rechazó publicar su trabajo, que no vio la luz hasta nueve años después de su muerte.

Residuos y polos

LA TEORÍA DE LOS RESIDUOS tiene vastas aplicaciones en matemática aplicada. Veremos cómo se pueden evaluar integrales complejas e, incluso, reales mediante esta técnica. Además, el estudio de los polos de una función y de sus residuos es de singular importancia para la física, ya que el dominio de analiticidad de ciertas funciones lleva asociado un significado físico, como ilustramos al final del capítulo.

6.1. Singularidades

Recordemos que el teorema de Cauchy-Goursat afirmaba que $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ si f es analítica. En el capítulo anterior, descubrimos que cuando f no es analítica en algún punto aislado interior a \mathcal{C} , podemos expandir f en una serie de potencias de Laurent de tal forma que el coeficiente b_1 de la expansión,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z) dz$$

nos da precisamente la integral de f a lo largo del contorno cerrado \mathcal{C} . Este resultado sugiere que tenemos a nuestra disposición un método de integración bastante potente siempre que encontremos algún modo de calcular el coeficiente b_1 .

En el siguiente ejemplo, ilustramos las ideas del párrafo anterior.

- ▷ EJEMPLO. Hallar la integral $I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ donde $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ y \mathcal{C} es la circunferencia $|z| = 1/2$.

f es analítica en todo \mathbb{C} salvo en las singularidades $z_0 = 0$ y $z_1 = 1$. La única singularidad que está dentro de \mathcal{C} es z_0 . Por tanto, podemos hallar I si conocemos la serie de Laurent asociada a $f(z)$ alrededor de $z = z_0$. En un ejemplo del capítulo anterior (véase la página 120), habíamos determinado que

$$\frac{1}{z(z-1)} = -(z^{-1} + 1 + z + z^2 + \dots)$$

Esta serie era válida cuando $0 < |z| < 1$ y, en particular, dentro de \mathcal{C} . Por tanto, encontramos que $b_1 = -1$ y se deduce inmediatamente que $I = -2\pi i$.

Para confirmar este resultado, podemos recurrir al teorema de Cauchy-Goursat, descomponiendo primero $f(z)$ en fracciones simples:

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

Escribamos, pues, $I = I_1 + I_2$ donde

$$I_1 = -\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} dz$$

$$I_2 = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1} dz$$

Puesto que $1/(z-1)$ es una función analítica dentro de \mathcal{C} , el teorema de Cauchy-Goursat establece que $I_2 = 0$. Por otro lado, la fórmula de la integral de Cauchy nos dice que $I_1 = -2\pi i$. Por tanto, $I = -2\pi i$, exactamente como habíamos determinado antes.

Definición. $f(z)$ tiene una **singularidad aislada** en $z = z_0$ si f es analítica en $0 < |z - z_0| < R$ para algún $R > 0$. Las funciones analíticas salvo en singularidades aisladas reciben el nombre de **meromorfas**.

Claramente, las singularidades aisladas desempeñan un papel fundamental en el cálculo de integrales por el método de las series de Laurent. Resulta conveniente, pues, clasificar los puntos singulares de una función expresada por su serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

válida en un cierto dominio $0 < |z - z_0| < R$.

Definición. $f(z)$ tiene una **singularidad evitable** en $z = z_0$ si $b_n = 0$ para todo n .

Definición. $f(z)$ tiene un **polo de orden n** en $z = z_0$ si el último coeficiente no nulo de la parte principal es b_n ($n \geq 1$). Cuando el único coeficiente no nulo es b_1 , se dice que $f(z)$ tiene un **polo simple** en $z = z_0$. El número b_1 recibe el nombre de **residuo**, denotándose $b_1 = \text{Res}[f(z), z_0]$ o simplemente $b_1 = \text{Res}(f, z_0)$.

Definición. $f(z)$ tiene una **singularidad esencial** en $z = z_0$ si existen infinitos b_n no nulos.

▷ EJEMPLO. Caracterizar la naturaleza de las singularidades de las siguientes funciones:

1. $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$
3. $f(z) = e^{1/z}$

1. La función f tiene una singularidad evitable en $z = 0$ ya que su expansión toma la forma

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots - 1 \right) = -\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

Como quiera que la serie no tiene parte principal (resulta ser una serie de Taylor), $f(z)$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$ (nótese que f no está definida ahí).

2. Habíamos visto en el primer ejemplo del capítulo que $f(z)$ en $0 < |z| < 1$ tiene una expansión de Laurent cuya parte principal viene dada por $-z^{-1}$. Luego sólo hay un coeficiente no nulo y éste es $b_1 = -1$. Por tanto, $f(z)$ tiene un polo simple en $z = 0$ y su residuo es $\text{Res}[f(z), 0] = -1$.

f tiene otra singularidad en $z = 1$. Su expansión en serie de Laurent es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1} \frac{1}{z+1-1} \\ &= \frac{1}{z-1} (1 + (1-z) + (1-z)^2 + \dots) = (z-1)^{-1} - 1 + \dots \end{aligned}$$

Luego $z = 1$ también es un polo simple. El residuo es el coeficiente b_1 que acompaña al término $(z-1)^{-1}$: $\text{Res}[f(z), 1] = 1$.

3. Calculamos unos pocos términos de la expansión de $f(z)$ sustituyendo z por $1/z$ en la serie de Taylor de e^z :

$$f(z) = 1 + \frac{1/z}{1!} + \frac{(1/z)^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{z^{-1}}{1!} + \frac{z^{-2}}{2!} + \dots$$

Notamos que los coeficientes de la parte principal son todos nulos. Así pues, $f(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

6.2. Ceros de una función

En el último ejemplo de la sección anterior se observa que la existencia de polos está muy relacionada con los ceros del denominador de una función dada.

Definición. Una función $f(z)$ analítica en $|z - z_0| < R$ tiene un **cerro de orden n** en $z = z_0$ si y sólo si $f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

A veces no hace falta calcular las derivadas y podemos recurrir al siguiente teorema:

Teorema. Sea $f(z)$ analítica en $0 < |z - z_0| < R$. Entonces f tiene un cerro de orden n si y sólo si f toma la forma

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

donde $g(z)$ es analítica en el punto z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

▷ EJEMPLO. Hallar los ceros de las siguientes funciones e indicar el orden de estos:

1. $f(z) = (1 + z^2)^2$
2. $f(z) = z^2 \operatorname{sen} z$
3. $f(z) = 1 - e^z$

1. Los ceros de $f(z)$ son $z = \pm i$. Podemos reescribir $f(z) = (z + i)^2(z - i)^2$. Por el teorema anterior, $z = \pm i$ son ceros de orden 2.
2. Los ceros de $f(z)$ son los de z^2 y $\operatorname{sen} z$, es decir, $z = 0$ y $z = n\pi$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Expresamos $f(z)$ en su desarrollo en serie de potencias de Taylor:

$$f(z) = z^2 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = z^3 \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots \right)$$

Por el teorema anterior, $z = 0$ es un cerro de orden 3 ya que el término entre paréntesis no se anula si sustituimos z por 0. Para hallar el orden de $z = n\pi$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ es más sencillo derivar:

$$f'(z) = 2z \operatorname{sen} z + z^2 \cos z$$

Observamos que $f'(n\pi) \neq 0$. Luego los puntos $z = n\pi$ con $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ son ceros de orden 1.

3. La función $f(z)$ tiene ceros en aquellos puntos que verifiquen la condición $e^z = 1$, es decir, $z = 2n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$). Siguiendo el procedimiento del caso anterior, observamos que $f'(2n\pi i) = -e^{2n\pi i} = 1 \neq 0$. Así pues, los ceros son de orden 1.

La exposición sobre los ceros de una función nos va a permitir formular un método alternativo a las series de Laurent para clasificar las singularidades de una función.

Teorema. Sea $f(z)$ una función analítica en $0 < |z - z_0| < R$. Entonces, f tiene un polo de orden n en z_0 si y sólo si

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

donde $g(z)$ es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

El siguiente corolario que se extrae del teorema anterior es muy útil para funciones racionales:

Corolario. Sean $g(z)$ y $h(z)$ funciones analíticas que poseen un cero en $z = z_0$ de orden m y n , respectivamente. Sea $f(z) = g(z)/h(z)$. Entonces:

1. Si $m < n$, z_0 es un polo de f de orden $n - m$.
2. Si $m \geq n$, z_0 es una singularidad evitable de f .

6.3. Fórmula del residuo

Supongamos que $f(z)$ tiene un polo de orden n en z_0 . Entonces, sabemos que la serie de Laurent es

$$f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Multiplicamos la expresión anterior por $(z - z_0)^n$ a ambos lados

$$(z - z_0)^n f(z) = b_n + b_{n-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + \dots$$

y derivamos $n - 1$ veces:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n - 1)!b_1 + n!a_0(z - z_0) + \dots$$

En consecuencia, calculando el $\lim_{z \rightarrow z_0}$ de la expresión anterior, llegamos directamente a la fórmula del residuo

$$b_1 = \text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]$$

Si $n = 1$ (polo simple), la fórmula del residuo es muy sencilla:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Obviamente, si la singularidad es evitable, el residuo se anula inmediatamente. Para singularidades esenciales, no hay un método sencillo y la única forma de calcular los residuos es recurrir a la serie de Laurent.

▷ EJEMPLO. Hallar los polos y residuos de $f(z) = \frac{z^2 + 3z - 2}{z + 2}$.

$f(z)$ tiene un polo simple en $z_0 = -2$ ya que el denominador tiene un cero de orden 1 ahí y el numerador no es divisible por $z + 2$. Entonces:

$$\text{Res}[f(z), -2] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + 2) \frac{z^2 + 3z - 2}{z + 2} = 4 - 6 - 2 = -4$$

6.4. Teorema de los residuos

La enorme utilidad de la determinación de los polos de una función y el cálculo de residuos se manifiesta en el siguiente teorema:

Teorema de los residuos. Sea \mathcal{D} un dominio simplemente conexo y \mathcal{C} un contorno simple cerrado contenido en \mathcal{D} . Si f es una función analítica en \mathcal{C} y en el interior de \mathcal{C} salvo en un número finito de singularidades aisladas z_1, \dots, z_m , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^m \text{Res}[f(z), z_n]$$

Demostración. Consideremos el dominio cerrado \mathcal{C} de la figura 6.1 y un número finito de singularidades rodeadas por pequeños contornos cerrados $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots$. Sea $\mathcal{B} = \mathcal{C} - \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_3 - \dots$. Por el teorema de Cauchy-Goursat aplicado a dominios múltiplemente conexos sabemos que

$$\int_{\mathcal{B}} f(z) dz = 0$$

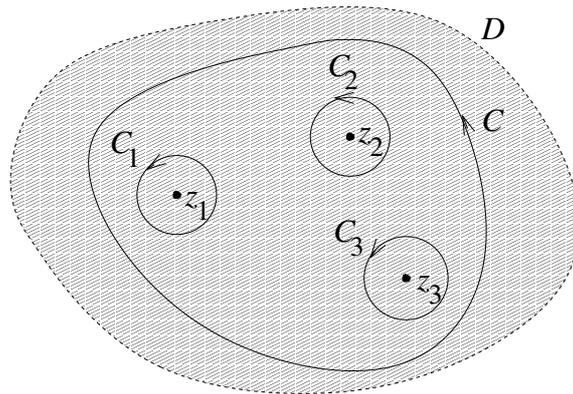


Figura 6.1: Ilustración del teorema de los residuos.

por lo que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \sum_n \int_{\mathcal{C}_n} f(z) dz = 2\pi i \sum_n \text{Res}[f(z), z_n] \quad \square$$

▷ EJEMPLO. Sea $f(z) = \frac{e^z}{z^3 + z}$. Hallar $I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ donde $\mathcal{C} : |z| = 2$.

Factorizamos el denominador: $z^3 + z = z(z+i)(z-i)$. Como el numerador es una función entera, las únicas singularidades de $f(z)$ son $z = 0$, $z = -i$ y $z = i$. Las tres son polos simples y están en el interior de \mathcal{C} . Calculamos los residuos asociados:

- $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z}{z(z+i)(z-i)} = \frac{1}{i \cdot (-i)} = 1$
- $\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} [z - (-i)] \frac{e^z}{z(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-i}}{-i \cdot (-2i)} = -\frac{1}{2} e^{-i}$
- $\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} [z - i] \frac{e^z}{z(z+i)(z-i)} = \frac{e^i}{i \cdot (2i)} = -\frac{1}{2} e^i$

Aplicamos ahora el teorema de los residuos:

$$I = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i \left(1 - \frac{e^i + e^{-i}}{2} \right) = 2\pi i (1 - \cos 1)$$

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$ siendo $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ y $\mathcal{C} : |z| = 1$.

La función $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 0$, que está en el interior de \mathcal{C} . Aplicamos la fórmula del residuo:

$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{e^z}{z^2} \right] = 1$$

Por tanto:

$$I = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i$$

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-2)(z-1)^2}$, siendo \mathcal{C} los dos contornos siguientes:

1. La circunferencia $\mathcal{C}_1 : |z| = \pi/2$
2. El rectángulo \mathcal{C}_2 de vértices $i, 4+i, 4-i, -i$.

Sea $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)^2}$, que tiene singularidades aisladas en $z = 2$ y $z = 1$.

1. En este caso, la singularidad $z = 2$ está *fuera* del contorno \mathcal{C}_1 . Luego la única singularidad que contribuye a I es $z = 1$, que es un polo de orden 2. Calculamos el residuo:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{1}{(z-2)(z-1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{(z-2)^2} = -1 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos simplemente que

$$I = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = -2\pi i$$

2. Cuando $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2$, tanto $z = 1$ como $z = 2$ están dentro del contorno. Hemos, pues, de calcular además el residuo de $f(z)$ en el polo simple $z = 2$:

$$\text{Res}(f, 2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) \frac{1}{(z-2)(z-1)^2} = 1$$

Aplicando el teorema de los residuos, obtenemos

$$I = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i(1 - 1) = 0$$

▷ EJEMPLO. Hallar $\int_{\mathcal{C}:|z|=10} e^{2/z} dz$.

El integrando es una función analítica en todo el dominio salvo en el punto singular aislado $z = 0$. Ya vimos en otro ejemplo que este punto es una singularidad esencial. Para calcular el residuo, no tenemos en este caso otra alternativa que determinar la serie de Laurent:

$$e^{2/z} = 1 + \frac{1}{1!} \frac{2}{z} + \frac{1}{2!} \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots$$

El coeficiente que acompaña a la potencia z^{-1} es 2. Luego $\text{Res}(e^{2/z}, 0) = 2$ y la integral vale $I = 2\pi i \text{Res}(e^{2/z}, 0) = 4\pi i$.

6.5. Integrales reales de funciones trigonométricas

Quizá la consecuencia más espectacular de la teoría de residuos es que proporciona herramientas muy sencillas para el cálculo de integrales *reales* sin más que expresar la integral en el plano complejo y luego aplicar el teorema de los residuos.

Comenzamos ilustrando este procedimiento con integrales del tipo

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

Si el integrando es una función racional, I puede escribirse en términos de cocientes de polinomios *en el plano complejo* mediante el cambio de variable $z = e^{i\theta}$. Como θ da una vuelta completa de 0 a 2π , la variable z representa el contorno $\mathcal{C} : |z| = 1$ en el plano \mathbb{C} y sólo resta calcular los residuos del integrando. Esperamos que el método quede claro con la ayuda de los siguientes ejemplos:

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos \theta}$

Hacemos la sustitución $z = e^{i\theta}$, de donde $d\theta = dz/iz$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{5 - 4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\mathcal{C}} \frac{2}{10z - 4z^2 - 4} dz \\ &= \frac{i}{2} \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \end{aligned}$$

Ahora calculamos los polos del integrando localizados dentro de la circunferencia de radio unidad. Para ello, hallamos los ceros del denominador:

$$z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0 \implies z = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = 2, 1/2$$

lo cual nos permite factorizar el integrando así:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{1}{(z-2)(z-1/2)}$$

Esta función tiene dos polos simples en $z = 2$ y $z = 1/2$. Sólo el último contribuye a I , pues $z = 2$ se sitúa fuera del contorno \mathcal{C} .

$$\operatorname{Res}(f, 1/2) = \lim_{z \rightarrow 1/2} (z - 1/2) \frac{1}{(z-2)(z-1/2)} = \frac{1}{1/2 - 2} = -\frac{2}{3}$$

Por tanto:

$$I = \frac{i}{2} 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1/2) = \frac{2\pi}{3}$$

El resultado es un número real puesto que partimos de una integral real.

▷ EJEMPLO. En la derivación de la tercera Ley de Kepler hay un paso en el que es necesario calcular la integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}$, siendo $0 < \varepsilon < 1$ la excentricidad de la órbita. Hallar I por el método de los residuos.

Tras el cambio de variables $z = e^{i\theta}$, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\left(1 + \varepsilon \frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{(2z + \varepsilon z^2 + \varepsilon)^2} dz \\ &= \frac{4}{i\varepsilon^2} \int_{\mathcal{C}} \frac{z}{\left(z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1\right)^2} dz \end{aligned}$$

Los ceros del denominador son:

$$z_{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{\varepsilon} \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1}$$

De los dos ceros, sólo z_+ se halla dentro del contorno \mathcal{C} . Se trata de un polo doble ya que podemos factorizar el integrando en la forma

$$f(z) = \frac{z}{(z - z_+)^2(z - z_-)^2}$$

Calculamos el residuo:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_+) &= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - z_-)^2} = \frac{(z_+ - z_-)^2 - 2z_+(z_+ - z_-)}{(z_+ - z_-)^4} \\ &= -\frac{z_+ + z_-}{(z_+ - z_-)^3} = \frac{1}{4\varepsilon} \frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

Aplicamos ahora el teorema del residuo para hallar I :

$$I = \frac{4}{i\varepsilon^2} 2\pi i \text{Res}(f, z_+) = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

▷ EJEMPLO. El kernel de Poisson

$$P(\theta) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (-1 < a < 1)$$

es una función que aparece en problemas bidimensionales con simetría circular. Por ejemplo, $P(\theta)$ está relacionado con la distribución de probabilidad de los coeficientes de transporte de ciertas nanoestructuras o con el

potencial electrostático de un disco conductor. Debido a su importancia, queremos hallar $I = \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta$.

Haciendo $z = e^{i\theta}$ obtenemos una integral sobre la circunferencia de radio unidad \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathcal{C}} \frac{1-a^2}{1-2a\frac{z+z^{-1}}{2}+a^2} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\mathcal{C}} \frac{1-a^2}{-az^2+z(1+a^2)-a} dz \\ &= \frac{i}{a} \int_{\mathcal{C}} \frac{1-a^2}{z^2 - \frac{1+a^2}{a}z + 1} dz \end{aligned}$$

Los ceros del denominador $z^2 - \frac{1+a^2}{a}z + 1$ son $z = a$ y $z = 1/a$. Puesto que $-1 < a < 1$, sólo el punto $z = a$ se sitúa dentro de \mathcal{C} , y corresponde a un polo simple de la función

$$f(z) = \frac{1-a^2}{(z-a)(z-1/a)}$$

Determinamos el residuo correspondiente:

$$\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{1-a^2}{(z-a)(z-1/a)} = \frac{1-a^2}{a-1/a}$$

Se sigue del teorema de los residuos que la integral vale

$$I = \frac{i}{a} 2\pi i \text{Res}(f, a) = \frac{i}{a} 2\pi i \frac{1-a^2}{a-1/a} = 2\pi$$

6.6. Integrales reales impropias

Los casos de la sección anterior ejemplifican la potencia del método de integración por residuos. Sin embargo, las integrales eran sencillas de calcular tras el cambio de variables $z = e^{i\theta}$ porque el contorno de integración compleja era siempre el mismo: la circunferencia de radio unidad. El teorema de integración por residuos va más allá, pudiéndose escoger los contornos que mejor nos convengan. De hecho, todas las integrales sobre el eje real pueden transformarse en una integral sobre un contorno cerrado del plano complejo siempre que un segmento del contorno contenga el intervalo real de integración.

Uno de los ejemplos más característicos de la estrategia que acabamos de avanzar es el cálculo de integrales reales impropias. En general, nos restringimos al *valor principal de Cauchy*:

$$\text{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

cuando el límite exista.

Sea f el cociente de polinomios $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$ para todo x y el grado de q es $n \geq m + 2$ (m es el grado de p). Entonces, se puede escoger el contorno cerrado \mathcal{C} en \mathbb{C} que consiste en el eje real (que llamamos \mathcal{C}_ρ) y la semicircunferencia de radio R , \mathcal{C}_R (véase la figura 6.2):

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz$$

Calculemos primero el valor de la integral sobre \mathcal{C}_R , aplicando la desigualdad 6 de la página 84:

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| \leq ML = \pi RM$$

donde L es la longitud de la semicircunferencia y M es la cota superior de la función f :

$$|f(z)| = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{R^m}{R^n} = M$$

donde hemos supuesto que el primer coeficiente de los polinomios es la unidad (si no, siempre se puede factorizar una constante). Por tanto:

$$\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{R^m}{R^n} = \pi R^{m+1-n}$$

La expresión anterior aclara por qué hemos puesto la condición $n \geq m + 2$ ya que, si se satisface, la integral sobre \mathcal{C}_R es cero en el límite $R \rightarrow \infty$. En consecuencia, podemos identificar la integral real impropia con la integral sobre \mathcal{C} ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathcal{C}}$$

que evaluaremos por el método de los residuos.

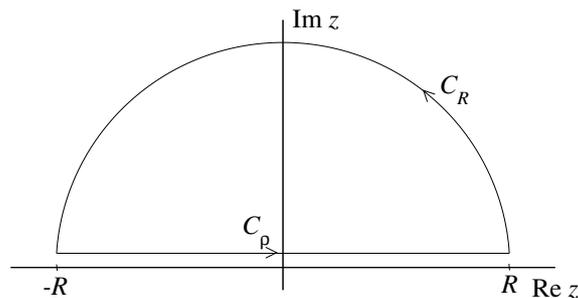


Figura 6.2: Contorno de integración para la evaluación de una integral real impropia.

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2 + 2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$.

Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R + \mathcal{C}_\rho$, donde \mathcal{C}_R es la semicircunferencia superior de radio R y \mathcal{C}_ρ es el eje real. La integral a lo largo todo el contorno \mathcal{C} es

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = I + \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz$$

donde $f(z) = \frac{3z^2 + 2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}$. El integrando es un cociente de polinomios tales que el grado del denominador es $n = 4$ y el del numerador es $m = 2$. Por tanto, se cumple la condición $n \geq m + 2$ y la integral sobre \mathcal{C}_R se anula cuando $R \rightarrow \infty$.

Calculamos ahora la integral sobre \mathcal{C} por el método de los residuos. Primero, hemos de hallar los polos de $f(z)$ y clasificarlos:

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2}{(z + 2i)(z - 2i)(z + 3i)(z - 3i)}$$

De la ecuación anterior se desprende que $f(z)$ posee cuatro polos: $z = \pm 2i$ y $z = \pm 3i$. De estos, solamente $z = 2i$ y $z = 3i$ se encuentran dentro de \mathcal{C} , por lo que son los únicos que contribuyen a la integral. Determinamos los residuos correspondientes a esos polos:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{3z^2 + 2}{(z + 2i)(z - 2i)(z + 3i)(z - 3i)} \\ &= \frac{3 \cdot (2i)^2 + 2}{(4i)(5i)(-i)} = \frac{i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 3i) &= \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i) \frac{3z^2 + 2}{(z + 2i)(z - 2i)(z + 3i)(z - 3i)} \\ &= \frac{3 \cdot (3i)^2 + 2}{(5i)i(6i)} = -\frac{5i}{6} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res} = 2\pi i \left(\frac{i}{2} - \frac{5i}{6} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

Luego $I = 2\pi/3$.

▷ EJEMPLO. En la teoría de la corriente electrónica entre dos gases electrónicos bidimensionales aparece la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{[(x - \varepsilon_1)^2 + a^2][(x - \varepsilon_2)^2 + a^2]}$$

donde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Hallar I por el método de los residuos.

Como en el ejemplo anterior, tomamos el contorno cerrado $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R + \mathcal{C}_\rho$, donde \mathcal{C}_R es la semicircunferencia superior de radio R y \mathcal{C}_ρ es el eje real. Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{[(z - \varepsilon_1)^2 + a^2][(z - \varepsilon_2)^2 + a^2]}$$

que es un cociente de polinomios que cumplen evidentemente la condición $n \geq m + 2$ donde $n = 4$ es el grado del denominador y $m = 0$ el del numerador. Luego la integral sobre \mathcal{C}_R se anula cuando $R \rightarrow \infty$.

La función $f(z)$ tiene polos en $z = \varepsilon_1 \pm ia$ y $z = \varepsilon_2 \pm ia$. Hallamos los residuos de los polos que se hallen dentro de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \varepsilon_1 + ia) &= \frac{1}{2ia[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + ia)^2 + a^2]} \\ \text{Res}(f, \varepsilon_2 + ia) &= \frac{1}{2ia[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + ia)^2 + a^2]} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \sum \text{Res} \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2ia[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + ia)^2 + a^2]} + \frac{1}{2ia[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + ia)^2 + a^2]} \right) \\ &= \frac{2\pi}{a} \frac{1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (2a)^2} \end{aligned}$$

Cuando el integrando es de la forma $\frac{p(x)}{q(x)} \cos x$ o $\frac{p(x)}{q(x)} \sin x$, también puede usarse el método anterior incluso cuando el grado del denominador cumple la condición $n \geq m + 1$, menos restrictiva que la anterior. La integral sobre \mathcal{C}_R se anula gracias al siguiente resultado:

Lema de Jordan. Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ el cociente de los polinomios p y q de grados m y n , respectivamente, que satisfacen la desigualdad $n \geq m + 1$ y sea \mathcal{C}_R la semicircunferencia superior $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < \pi$). Entonces:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz} dz = 0$$

si $a > 0$. Si $a < 0$, entonces debe tomarse la semicircunferencia inferior:

▷ EJEMPLO. La integral $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$ con $a, b > 0$ aparece con frecuencia en la teoría cuántica de dispersión. Hallar I aplicando el método de integración por residuos.

Observamos que el integrando $f(x) = \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}$ es una función par: $f(x) = f(-x)$. Entonces, podemos extender el límite de integración a $-\infty$,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$$

para poder aplicar el método empleado en los ejemplos anteriores. Es necesario un paso más para hacer uso del lema de Jordan:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx$$

Sea, pues, la función $g(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$. Formamos un contorno \mathcal{C} que consiste en el eje real unido a la semicircunferencia superior de radio R . Gracias al lema de Jordan, $\int_{\mathcal{C}_R} g(z) dz = 0$ puesto que el grado del denominador es $n = 2$ y el del numerador es $m = 0$, satisfaciéndose la desigualdad $n \geq m + 1$. Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2} dx = \int_{\mathcal{C}} g(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}$$

La función $g(z)$ tiene dos polos, uno en $z_+ = ib$ y otro en $z_- = -ib$. Puesto que $b > 0$, sólo contribuye a la suma de los residuos el polo en z_+ :

$$\operatorname{Res}(g, z_+) = \lim_{z \rightarrow ib} (z - ib) \frac{e^{iaz}}{(z + ib)(z - ib)} = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

Luego

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{e^{-ab}}{2ib} \right) = \frac{\pi e^{-ab}}{2b}$$

Hasta ahora los polos de la función asociada al integrando se hallaban dentro del contorno de integración. El problema surge cuando el polo se encuentra *sobre* el contorno. Entonces, es muy útil el siguiente teorema:

Teorema. Sea $f(z)$ una función con un polo simple $z = x_0$ en el eje real. Entonces:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\rho} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, x_0)$$

donde \mathcal{C}_ρ es la semicircunferencia $|z - x_0| = \rho$ orientada en sentido horario (de ahí el signo $-$).

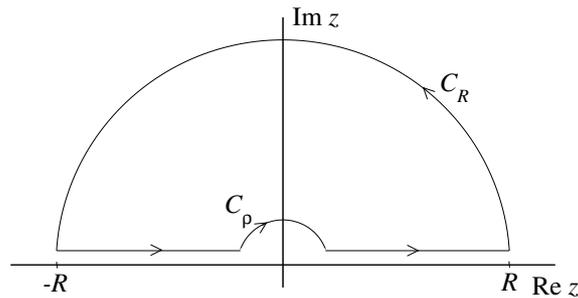


Figura 6.3: Contorno de integración para la evaluación de una integral impropia con un punto singular en $z = 0$.

▷ EJEMPLO. La integral $I = \text{P} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$ la podemos encontrar en teoría de la información y es útil en procesamiento de señales. Hallar I por el método de los residuos.

La integral parece inocente, pero vamos a necesitar los dos teoremas anteriores para resolverla. Como en el ejemplo anterior, extendemos el dominio de integración a $-\infty$ ya que el integrando es una función par. Por otro lado, consideramos la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, que tiene un polo simple en $z = 0$. Entonces:

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Sea el contorno \mathcal{C} de la figura 6.3 formado por la semicircunferencia \mathcal{C}_R , los segmentos que van de $-R$ a $-\rho$ y de ρ a R y la semicircunferencia \mathcal{C}_ρ de radio ρ . Nótese que, gracias al contorno \mathcal{C}_ρ , rodeamos la singularidad $z = 0$. Al final, haremos los límites $R \rightarrow \infty$ y $\rho \rightarrow 0$, lo cual nos permitirá identificar la integral de $-\infty$ a ∞ con I por medio de la ecuación de arriba. Por tanto:

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_R} + \int_{-R}^{-\rho} + \int_{\mathcal{C}_\rho} + \int_{\rho}^R = 0$$

ya que $f(z)$ es analítica en el dominio escogido (la singularidad queda en el exterior de \mathcal{C}). Calculamos el residuo:

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} = 1$$

Por tanto, podemos aplicar el teorema visto anteriormente:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\rho} f(z) dz = -\pi i \text{Res}(f, x_0) = -\pi i$$

La integral sobre \mathcal{C}_R es cero pues el integrando es de la forma $p(z)e^{iz}/q(z)$ y el grado del denominador ($n = 1$) es más grande en una unidad que el del numerador ($m = 0$). Finalmente:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-\rho} + \int_{\rho}^R \right) = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\rho} = \pi i$$

Por tanto:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}$$

Habríamos llegado al mismo resultado de haber rodeado el origen *por debajo*. Entonces, la integral sobre \mathcal{C}_ρ cambia de signo debido al cambio de orientación de \mathcal{C}_ρ y ahora el polo $z = 0$ está en el interior de \mathcal{C} . Por tanto:

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_R} + \int_{-R}^{-\rho} + \pi i \operatorname{Res}(f, 0) + \int_{\rho}^R = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

de donde se deriva

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(2\pi i - \pi i) = \frac{\pi}{2}$$

igual que antes.

El siguiente ejemplo da un resultado muy hermoso, aunque el contorno elegido es diferente al que estamos acostumbrados:

- ▷ EJEMPLO. Estudiar los polos y residuos de la función $f(z) = \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z^2}$ para calcular $I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz$, donde \mathcal{C} es el rectángulo de vértices $(n + 1/2) + i$, $-(n + 1/2) + i$, $-(n + 1/2) - i$ y $(n + 1/2) - i$, siendo $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La función $\operatorname{cotg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ tiene polos en los ceros del denominador: $z = n$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Por otro lado, la función z^2 tiene un cero de orden 2 en $z = 0$. En consecuencia, $f(z)$ tiene polos simples a lo largo del eje real en $z = n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) y un polo de orden 3 en $z = 0$. Por tanto, la integral sobre el contorno pedido es

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, 0) + \sum_{n \neq 0} \operatorname{Res}(f, n) \right)$$

Se puede demostrar, por los métodos de los que hemos hecho uso en esta sección, que $I = 0$ en el límite en que la anchura del contorno \mathcal{C} tiende a ∞ (el polinomio del denominador tiene grado ≥ 2). Luego el miembro derecho

de la ecuación anterior tiene necesariamente que anularse. Calculamos la expresión para los residuos de los polos simples:

$$\operatorname{Res}(f, n \neq 0) = \lim_{z \rightarrow n} (z - n) \frac{\cotg \pi z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\cos \pi z}{z^2} \frac{z - n}{\operatorname{sen} \pi z}$$

Utilizamos la propiedad de que el límite del producto es el producto de los límites (véase la página 45) y aplicamos la regla de l'Hôpital al cociente de la derecha:

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow n} \frac{1}{\cos \pi z}$$

Luego

$$\operatorname{Res}(f, n \neq 0) = \frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow n} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{\pi n^2}$$

y podemos escribir

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\pi \operatorname{Res}(f, 0)$$

Por tanto, si hallamos $\operatorname{Res}(f, 0)$ seremos capaces de calcular la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{\cotg \pi z}{z^2} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (\cotg \pi z - z \operatorname{cosec}^2 \pi z) \\ &= \pi \lim_{z \rightarrow 0} [(\pi z \cotg \pi z - 1) \operatorname{cosec}^2 \pi z] = \pi \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z \cos \pi z - \operatorname{sen} \pi z}{\operatorname{sen}^3 \pi z} \\ &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la regla de l'Hôpital. Por tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Este resultado fue obtenido por Euler por primera vez, aunque mediante un método totalmente distinto. De hecho, las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ con k un número entero han sido fundamentales en la historia de las matemáticas. Convergen en el caso $k > 1$ (para $k = 1$ la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, aunque muy lentamente). Estas series pueden generalizarse promocionando el exponente a una variable compleja z :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 1$$

La función $\zeta(z)$ se denomina **función zeta de Riemann** y ha sido objeto de innumerables estudios. Parte de este interés proviene de una relación insospechada entre $\zeta(z)$ y los números primos. Euler demostró que

$$\zeta(z) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$$

donde p denota números primos sucesivos: $p = 2, 3, 5, 7, 11 \dots$. Sabemos que $\zeta(1) = \infty$. Por tanto, el productorio de arriba debe tener un número infinito de factores. *Luego existen infinitos números primos.*

6.7. Transformada inversa de Laplace

La transformada de Laplace es una herramienta útil en muy diversas disciplinas (estabilidad de sistemas, teoría de control) donde se necesita conocer para $t > 0$ una función $f(t)$ que típicamente obedece una ecuación diferencial con condiciones iniciales (véase el apéndice A, donde el lector encontrará una exposición más detallada). Se parte entonces de una función $F(s)$, analítica en el semiplano $\text{Re } s \geq \gamma$, y se desea calcular la transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) e^{ts} ds$$

Esta expresión también se denomina *integral de Bromwich*. $F(s)$ posee singularidades s_1, s_2, \dots a la izquierda del eje vertical $\text{Re } s = \gamma$. Nuestro objetivo será calcular la integral de Bromwich por el método de los residuos.

Consideremos el contorno descrito en la figura 6.4. $f(t)$ se calcula integrando a lo largo de la línea que va desde $\gamma - iR$ hasta $\gamma + iR$ o de cualquier camino deformado a partir de esta línea. En cualquier caso, las singularidades siempre deben caer dentro de la semicircunferencia C_R , por lo que se toma el radio como $R = \max\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_N|\}$. Cuando $R \rightarrow \infty$ recuperamos la integral de Bromwich, y la integral sobre el contorno cerrado puede determinarse mediante el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} F(s) e^{ts} ds + \int_{C_R} F(s) e^{ts} ds = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(F e^{ts}, s_n)$$

Llamemos I a la integral sobre C_R dividida por $2\pi i$. I se calcula parametrizando la semicircunferencia del siguiente modo: $s(\theta) = \gamma + R e^{i\theta}$, siendo $\pi/2 \leq \theta \leq$

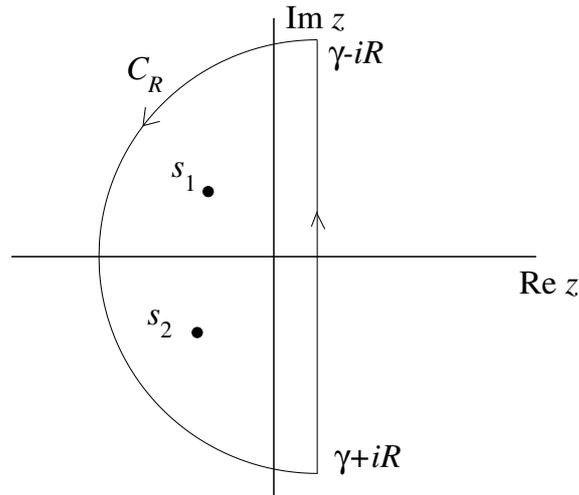


Figura 6.4: Contorno genérico de integración para la evaluación de una transformada inversa de Laplace.

$3\pi/2$. Entonces:

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} F(\gamma + Re^{i\theta}) e^{t\gamma + tRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{R}{2\pi} e^{t\gamma} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |F(\gamma + Re^{i\theta})| |e^{tR\cos\theta}| |e^{itR\sin\theta}| |e^{i\theta}| d\theta \end{aligned}$$

Como $e^{tR\cos\theta}$ es una función positiva y el módulo de las exponenciales imaginarias es 1, podemos escribir

$$|I| \leq \frac{R}{2\pi} e^{t\gamma} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |F(\gamma + Re^{i\theta})| e^{tR\cos\theta} d\theta$$

Normalmente, $F(s)$ es una función que decae al menos como $1/|s^k|$ con algún $k > 0$ para valores grandes de R . Supongamos entonces que $F(s) \leq M/|s^k|$ donde M es una constante positiva. Esta condición implica que $|sF(s)|$ está acotada si $R \rightarrow \infty$ y la ecuación anterior queda

$$|I| \leq \frac{Me^{t\gamma}}{2\pi R^{k-1}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR\cos\theta} d\theta = \frac{Me^{t\gamma}}{\pi R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\phi} d\phi$$

En el último paso se ha hecho el cambio de variable $\theta = \phi + \pi/2$ y se ha tenido en cuenta que el integrando es simétrico alrededor de la línea vertical $\theta = \pi/2$. Como $\sin\phi \geq 2\phi/\pi$ en el intervalo de integración, se tiene que

$$|I| \leq \frac{Me^{t\gamma}}{\pi R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\phi/\pi} d\phi = \frac{Me^{t\gamma}}{2tR^k} (1 - e^{-tR})$$

El lado derecho de la ecuación se anula en el límite $R \rightarrow \infty$. Luego la integral sobre \mathcal{C}_R es cero y la transformada inversa de Laplace viene dada simplemente por la suma de todos los residuos de la función $F(s)e^{ts}$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \text{Res}(F e^{ts}, s_n)$$

▷ EJEMPLO. Hallar la transformada inversa de Laplace si $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$.

F va como $1/|s|^2$ a distancias grandes, así que esta función verifica las condiciones del resultado anterior y es suficiente con que calculemos los residuos asociados a las singularidades de $F(s)e^{ts}$.

Observamos que F tiene dos polos simples en $s = i$ y $s = -i$. Calculamos sus residuos:

$$\begin{aligned} \text{Res}(F e^{ts}, s = i) &= \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{ts}}{s + i} = \frac{e^{it}}{2i} \\ \text{Res}(F e^{ts}, s = -i) &= \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{ts}}{s - i} = -\frac{e^{-it}}{2i} \end{aligned}$$

En consecuencia, la transformada inversa de Laplace vendrá dada por

$$f(t) = \sum \text{Res} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \text{sen } t$$

6.8. Integrales sobre cortes de rama

En ocasiones habremos de integrar funciones no definidas en ciertas regiones que corresponden a cortes de rama. La estrategia que seguiremos consiste en escoger un contorno que evite precisamente el punto de ramificación. Veamos el siguiente ejemplo:

▷ EJEMPLO. Hallar $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx$ donde $a > 0$.

Sea la función compleja $f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + a^2}$, que no está definida en $z = 0$ y la parte principal tiene una rama en $\text{Re } z < 0$ (el semieje real negativo). Esto invalida el contorno usual \mathcal{C} que consiste en la semicircunferencia superior de radio $R \rightarrow \infty$ unida al eje real, rodeando el origen con una semicircunferencia de radio $\rho \rightarrow 0$ (figura 6.3). Por tanto, hemos de cambiar de rama. Escogemos que $\ln z$ esté definido para los ángulos $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, es decir, escogemos como corte de rama el semieje imaginario negativo, que

se halla fuera del contorno \mathcal{C} . Esta elección permite aplicar el teorema de los residuos ya que ahora $f(z)$ es una función analítica dentro de (y sobre) \mathcal{C} salvo por la singularidad aislada $z = ia$, que es un polo simple:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{\ln z}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{\ln(ia)}{2ia} \\ &= \frac{\pi}{4a} - \frac{i}{2a} \ln a\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} &= \int_{\mathcal{C}_R} + \int_{-R}^{-\rho} + \int_{\mathcal{C}_\rho} + \int_{\rho}^R = 2\pi i \operatorname{Res}(f, ia) \\ &= \frac{\pi \ln a}{a} + i \frac{\pi^2}{2a}\end{aligned}$$

Demostramos que la integral sobre \mathcal{C}_R , que parametrizamos como $z = Re^{i\theta}$, es cero:

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathcal{C}_R} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} i R e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \frac{R(\ln R + \pi)}{R^2 - a^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty\end{aligned}$$

El límite de arriba se puede probar aplicando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \ln R}{R^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln R}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0$$

Después, determinamos la integral sobre \mathcal{C}_ρ como en la sección anterior:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\rho} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\ln z}{z^2 + a^2} = 0$$

donde en el límite anterior se ha vuelto a utilizar la regla de l'Hôpital.

Finalmente, hacemos notar que $\ln z$ definida en la región $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ toma la forma $\ln z = \ln|x| + i\pi$ en el semieje real negativo y $\ln z = \ln x$ en el semieje real positivo. Luego

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-\rho} \frac{\ln|x| + i\pi}{x^2 + a^2} dx + \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx \right) = \frac{\pi \ln a}{a} + i \frac{\pi^2}{2a}$$

Haciendo el cambio de variables $x \rightarrow -x$ en la primera integral, obtenemos

$$2 \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\rho}^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx}_I + i\pi \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\rho}^R \frac{dx}{x^2 + a^2}}_J = \frac{\pi \ln a}{a} + i \frac{\pi^2}{2a}$$

Igualando partes reales e imaginarias, llegamos al resultado final:

$$I = \frac{\pi \ln a}{2a}$$

$$J = \frac{\pi}{2a}$$

Nótese que hemos obtenido el valor de dos integrales por el precio de una. Se deja para el lector comprobar que el valor de J es correcto, calculando la primitiva con técnicas de análisis real.

6.9. Aplicación: Las funciones de Green y la flecha del tiempo

Continuamos en esta sección indagando en las relaciones entre el principio de causalidad y las integrales en el plano complejo, que ya se introdujo al final del capítulo 4. Para ello, es conveniente considerar un sistema modelo: el oscilador armónico amortiguado y forzado.

Sea $x(t)$ el desplazamiento de una partícula de masa m de su posición de equilibrio a tiempo t . Sobre la partícula se ejerce una fuerza de recuperación tipo muelle, $-kx$, siendo k la constante de recuperación. También supondremos que la partícula está inmersa en algún tipo de fluido que amortigua su movimiento. Esta fuerza de viscosidad toma normalmente la forma $-\eta\dot{x}$, donde η es la constante de rozamiento. Finalmente, tomaremos en cuenta que existe una fuerza externa general, $f(t)$, de modo que la ecuación de movimiento para x se deriva de la segunda ley de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + f(t)$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación de la carga en un circuito RLC que estudiamos en el capítulo 3. Se pueden identificar m con la inductancia L , η con la resistencia R y k con el recíproco de la capacitancia C . En ese ejemplo considerábamos un potencial externo V (que puede asociarse a nuestra fuerza f) de tipo sinusoidal. Ahora no especificaremos la forma concreta de $f(t)$ e intentaremos resolver el problema para una $f(t)$ arbitraria. La estrategia que seguimos es similar: transformar la ecuación diferencial de segundo orden en una ecuación algebraica. Para ello, multiplicamos los dos miembros de la ecuación por el factor $e^{-i\omega t}$ e integramos:

$$m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2x}{dt^2} e^{-i\omega t} dt + \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt + k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Los términos que contienen derivadas con respecto a t pueden integrarse por partes. Por ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-i\omega t} dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Luego podemos hacer la sustitución $d/dt \rightarrow i\omega$ en la ecuación diferencial, obteniéndose la ecuación algebraica

$$[-m\omega^2 + i\eta\omega + k] \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Las funciones definidas por las integrales se denominan **transformadas de Fourier**. Ya vimos un ejemplo de estas funciones al final del capítulo 4. A la definición se suele añadir el factor numérico $1/2\pi$:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Las transformadas de Fourier pueden visualizarse como una descomposición de una variable dinámica en una superposición de términos armónicos, cada uno de ellos con una frecuencia ω . Constituyen una herramienta extraordinariamente útil en muchos problemas físicos, aunque no éste el sitio adecuado para enumerar todas sus propiedades. Nos conformamos con saber que transformando al espacio de Fourier podemos reescribir una ecuación diferencial en una algebraica. En nuestro caso, tenemos que

$$[-m\omega^2 + i\eta\omega + k]X(\omega) = F(\omega)$$

de donde se tiene inmediatamente que

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + i\eta\omega + k}$$

Las transformadas inversas de las integrales anteriores son¹

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

¹ Las definiciones que aquí se dan no son únicas. Pueden utilizarse perfectamente otras expresiones alternativas con tal que cumplan dos condiciones: (i) el producto de los prefactores numéricos de la transformada de Fourier y de su inversa debe ser igual a $1/2\pi$; y (ii) el exponente de $e^{i\omega t}$ en la transformada de Fourier y en su inversa debe tener signo opuesto.

Por tanto, la solución a nuestro problema es

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{-m\omega^2 + i\eta\omega + k} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{-m\omega^2 + i\eta\omega + k} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') G(t, t') dt' \end{aligned}$$

donde se ha definido la **función de Green**

$$G(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{-m\omega^2 + i\eta\omega + k} d\omega$$

Las funciones de Green aparecen en ecuaciones diferenciales donde el término inhomogéneo es desconocido o cuando deseamos hallar la solución para una $f(t)$ arbitraria. Como la función de Green es el inverso de un operador diferencial, existe una fauna muy poblada de tales funciones, pero todas ellas tienen propiedades en común. La que más nos interesa aquí es que reflejan el flujo del tiempo, ya que toman una forma distinta en función de si $t > t'$ o $t < t'$. De ahí que a este tipo de funciones de Green se les agregue el adjetivo *causal*.

Veamos cómo surge esa dependencia temporal calculando la integral explícitamente mediante el método de los residuos. Reescribimos la función de Green:

$$G(t, t') = -\frac{1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2} d\omega$$

donde hemos definido las constantes

$$\gamma = \frac{\eta}{2m}$$

y

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La frecuencia ω_0 es la natural del sistema, correspondiente a la frecuencia con la que oscilaría la partícula si no hubiera rozamiento ni fuerza externa.

Considérese ahora la función

$$h(z) = \frac{e^{i(t-t')z}}{z^2 - 2i\gamma z - \omega_0^2}$$

que es analítica en todo \mathbb{C} salvo en los ceros del denominador:

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} + i\gamma$$

Los puntos z_{\pm} son polos simples con residuos

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(h, z_+) &= \frac{e^{i(t-t')z_+}}{z_+ - z_-} \\ \operatorname{Res}(h, z_-) &= \frac{e^{i(t-t')z_-}}{z_- - z_+}\end{aligned}$$

Para calcular la integral impropia que define la función $G(t, t')$ supongamos que $t > t'$ y tomemos el contorno \mathcal{C} definido por el semicírculo superior de radio $R \rightarrow \infty$ y el eje real (véase la figura 6.5). Los dos polos caen dentro del contorno. Usando el lema de Jordan, la integral sobre el arco se anula y, en consecuencia, la integral impropia es igual a la integral compleja sobre todo el contorno, a la cual aplicamos el teorema de los residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2} d\omega = \oint_{\mathcal{C}} h(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res}$$

Así pues,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega^2 - 2i\gamma\omega - \omega_0^2} d\omega &= 2\pi i \left[\frac{e^{i(t-t')z_+}}{z_+ - z_-} + \frac{e^{i(t-t')z_-}}{z_- - z_+} \right] \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} \operatorname{sen} \left[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t') \right]\end{aligned}$$

Si $t < t'$, el contorno que debemos tomar ahora es la semicircunferencia *inferior* (línea a trazos de la figura 6.5) para que el lema de Jordan siga siendo válido y podamos anular la integral sobre el arco cuando $R \rightarrow \infty$. Pero entonces la suma sobre los residuos es cero puesto que los dos polos se sitúan por encima del eje real. Por tanto, la función de Green es

$$G(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma(t-t')} \operatorname{sen} \left[\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}(t-t') \right] & \text{si } t > t' \\ 0 & \text{si } t < t' \end{cases}$$

y se ve claramente la fuerte dependencia temporal de la función de Green. Investiguemos un poco más su procedencia. Recordemos que el desplazamiento del oscilador es

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') G(t, t') dt'$$

que puede descomponerse en la forma

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(t') G(t, t') dt' + \int_t^{\infty} f(t') G(t, t') dt'$$

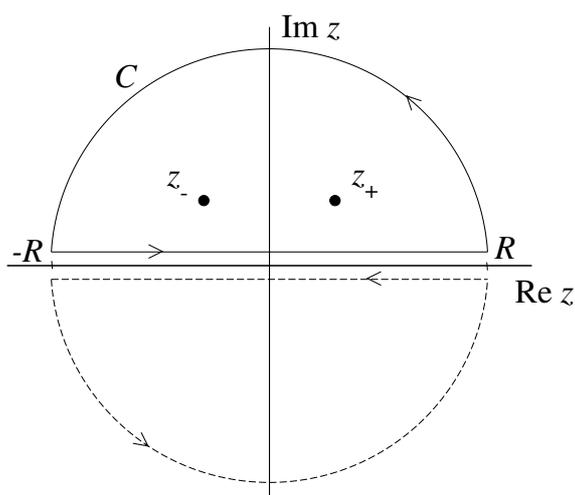


Figura 6.5: Contorno de integración para la evaluación de la función de Green.

Como $G(t, t') = 0$ si $t' > t$, sólo la primera integral contribuye a la posición de la partícula ya que físicamente sólo tiene sentido que el movimiento del oscilador venga determinado por la fuerza que ha actuado sobre él *en el pasado*. Ésta es una manifestación más del principio de causalidad que se refleja bellamente en la posición de los polos de la función de Green. Si los polos estuvieran situados por debajo del eje real, x vendría dado por la acción de f en el futuro, lo cual no tiene sentido físico.

No queremos acabar esta discusión sin hacer una observación curiosa. En el límite en que la viscosidad del medio se anula, $\gamma \rightarrow 0$, los polos z_{\pm} se aproximan al eje real y deja de haber distinción entre pasado y futuro. La flecha del tiempo, entonces, parece depender fuertemente de la presencia de rozamiento en el sistema. Es evidente que si no existe rozamiento, la segunda ley de Newton es invariante bajo inversiones temporales. Por tanto, parece necesaria la presencia de disipación en un sistema físico para que la flecha del tiempo apunte en la dirección a la que estamos acostumbrados.

6.10. Problemas resueltos

□ PROBLEMA. Sea

$$f(z) = \frac{\sinh(\pi z/2)}{z^3 + z}$$

Clasificar las singularidades de $f(z)$ y calcular los residuos correspondientes.

Solución. La función es analítica en todo \mathbb{C} salvo en aquellos puntos que anulen el denominador. Reescribimos éste como $z^3 + z = z(z^2 + 1) = z(z + i)(z - i)$. Por tanto, las singularidades son $z = 0$, $z = i$ y $z = -i$.

- $z = 0$ es un cero de orden 1 del numerador y del denominador. Por tanto, esta singularidad es *evitable* y su residuo es automáticamente cero.
- $z = i$ no anula el numerador y es un cero de orden 1 del denominador. Luego $z = i$ es un *polo simple* cuyo residuo vale

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{\sinh(\pi i/2)}{i(i + i)} = -\frac{i}{2}$$

- $z = -i$ no anula el numerador y es un cero de orden 1 del denominador. Luego $z = -i$ es un *polo simple* cuyo residuo vale

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = \frac{\sinh(-\pi i/2)}{(-i)(-i - i)} = \frac{i}{2}$$

□ PROBLEMA. Sea $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$. Hallar la serie de Laurent en $0 < |z-1| < 2$, clasificar sus polos y calcular los residuos correspondientes.

Solución. f tiene singularidades en $z = 1$ (polo doble) y $z = 3$ (polo simple). En el dominio $\mathcal{D} : 0 < |z-1| < 2$, $f(z)$ es analítica excepto en $z = 1$. Como tenemos que expandir en potencias de $z-1$, reescribimos el término $1/(z-3)$:

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}}$$

Usamos $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, una expresión válida para $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = 1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \dots$$

Esta ecuación es válida si $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, es decir, si $|z-1| < 2$, que es precisamente el dominio \mathcal{D} . Por tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1)^{-2} \frac{-1}{2} \left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \dots \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[(z-1)^{-2} + \frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \frac{1}{4} + \dots \right] \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\text{Res}(f, 1) = -1/4$. A la misma respuesta se llega aplicando la fórmula del residuo:

$$\text{Res}(f, 1) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}$$

Finalmente, calculamos el residuo correspondiente al polo simple:

$$\text{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{1}{(z-2)^2(z-3)} = 1$$

□ PROBLEMA. Determinar la integral

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-1} dz,$$

donde \mathcal{C} es el contorno descrito por la ecuación $|z| = 2$ y $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$.

Demostrar que $I \neq 2\pi i f(1)$ y razonar si este resultado contradice la fórmula de Cauchy.

Solución. Sea $g(z) = f(z)/(z-1)$, que es una función meromorfa en \mathcal{C} con singularidades aisladas en $z = 0, 1, -1$. Calculamos I mediante el teorema de los residuos:

$$I = 2\pi i \sum \text{Res}$$

donde los residuos son:

$$\text{Res}(g, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z g(z) = -1$$

$$\text{Res}(g, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) g(z) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Res}(g, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} (z+1)^2 g(z) = \frac{3}{4}$$

Luego $I = 0$. El resultado es diferente de $2\pi i f(1) = \pi i/2$, valor que obtendríamos si aplicáramos la fórmula de Cauchy a $f(z)$. Pero una de las condiciones para aplicar dicha fórmula es que f sea analítica en \mathcal{C} . Como f evidentemente no lo es, no se puede aplicar la fórmula de Cauchy y no existe, por tanto, contradicción alguna.

□ PROBLEMA. Sea f una función analítica en todo \mathbb{C} . Hallar la integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \theta d\theta$$

sabiendo que $f(0) = 1/\pi$ y $f''(0) = 4/\pi$.

Solución. Hacemos el cambio de variables $z = e^{i\theta}$, pasando de una integral sobre una variable real a una integral en \mathcal{C} a lo largo del contorno $\mathcal{C} : |z| = 1$:

$$I = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \theta \, d\theta = \int_{\mathcal{C}} f(z) \left(\frac{z+z^{-1}}{2} \right)^2 \frac{dz}{iz}$$

Entonces,

$$I = \frac{1}{4i} \left[\underbrace{\int_{\mathcal{C}} f(z) z \, dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^3} \, dz}_{I_2} + 2 \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} \, dz}_{I_3} \right]$$

Ahora bien, $I_1 = 0$ por el teorema de Cauchy-Goursat. Las otras dos integrales pueden calcularse a partir de la fórmula de Cauchy:

$$I_2 = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = 4i$$

$$I_3 = 2\pi i f(0) = 2i$$

Sustituyendo estos valores arriba, encontramos que $I = 2$.

- PROBLEMA. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^3 + x} \, dx.$$

Solución. Utilizamos la fórmula de Euler para expresar la integral en la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^3 + x} \, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^3 + x} \, dx$$

Sea la función

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^3 + z}$$

que tiene polos simples en 0 , i y $-i$. Elegimos el contorno usual (véase la figura 6.3):

$$\int_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}_R} + \int_{-R}^{-\rho} + \int_{\mathcal{C}_\rho} + \int_{\rho}^R$$

donde $R \rightarrow \infty$ y $\rho \rightarrow 0$. La integral a lo largo del contorno \mathcal{C}_R se anula por el lema de Jordan (grado del denominador $n = 3$, grado del numerador $m = 0$;

se cumple $n \geq m + 1$). Calculamos los residuos asociados a los polos que contribuyen a la integral:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 0) &= 1 \\ \operatorname{Res}(f, i) &= -\frac{1}{2}e^{-\pi}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}_\rho} &= -\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = -\pi i \\ \int_{\mathcal{C}} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = -\pi i e^{-\pi}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = -i\pi e^{-\pi} + \pi i = \pi i(1 - e^{-\pi})$$

de donde se tiene que $I = \operatorname{Im} J = \pi(1 - e^{-\pi})$.

□ PROBLEMA. Sea

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 - 2ix - 2} dx$$

donde α es real. Determinar f para $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.

Solución. La integral puede resolverse por el método de los residuos. Para ello, escogemos el contorno \mathcal{C} que consiste en la semicircunferencia superior con radio $R \rightarrow \infty$ y el eje x :

$$\int_{\mathcal{C}} g(z) dz = \int_{\mathcal{C}_R} g(z) dz + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

donde hemos definido la función

$$g(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 - 2iz - 2}$$

La función g es de la forma $p(z)e^{i\alpha z}/q(z)$, donde el grado del denominador es 2 y el del numerador, 0. Por tanto, se cumple el lema de Jordan y la integral a lo largo del contorno \mathcal{C}_R se anula. La integral a lo largo de \mathcal{C} se determina por el teorema de los residuos.

$g(z)$ es meromorfa con polos simples en $z = 1 + i$ y $z = -1 + i$. Los dos se sitúan en el semiplano superior. Calculamos sus residuos:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 1 + i) &= \lim_{z \rightarrow 1+i} (z - 1 - i)f(z) = \frac{1}{2}e^{-\alpha}e^{i\alpha} \\ \operatorname{Res}(f, -1 + i) &= \lim_{z \rightarrow -1+i} (z + 1 - i)f(z) = -\frac{1}{2}e^{-\alpha}e^{-i\alpha}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(\alpha) = 2\pi i \sum \text{Res} = \pi i e^{-\alpha} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = -2\pi e^{-\alpha} \sin \alpha$$

para $\alpha > 0$. Si $\alpha < 0$, el contorno se cierra por debajo del eje x y, como ahí g no posee singularidades, la integral sobre \mathcal{C} se anula. En consecuencia, $f(\alpha) = 0$ para $\alpha < 0$.

□ PROBLEMA. Calcular la transformada de Laplace inversa de la función

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)^2}.$$

Solución. $F(s)e^{ts}$ es una función meromorfa con un polo simple en $s = 2$ y un polo doble en $s = 1$. Calculamos los residuos correspondientes:

$$\begin{aligned} \text{Res}(Fe^{ts}, s=2) &= \lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \frac{e^{ts}}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{e^{2t}}{9} \\ \text{Res}(Fe^{ts}, s=1) &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{e^{ts}}{(s-2)(s+1)^2} \right] = -\frac{3te^{-t} + e^{-t}}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, la transformada de Laplace inversa es:

$$f(t) = \frac{1}{9} [e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t}]$$

6.11. Ejercicios

1. Clasificar las singularidades de las funciones propuestas en el ejercicio 2 del capítulo 5 y calcular los residuos cuando sea posible.
2. Demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4 + z^3 - 2z^2} = 0$$

donde $\mathcal{C} : |z| = 4$ y razonar si existe una posible violación del teorema de Morera.

3. Calcular las siguientes integrales reales por el método de los residuos:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{2 + \cos \theta} d\theta$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2 - 3x + 2)}$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 16} dx$$

$$e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$f) \int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 1} dx$$

4. Hallar la forma explícita del desplazamiento de un oscilador armónico amortiguado bajo la acción de la fuerza $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Comparar con las expresiones obtenidas en el capítulo 3 para un circuito RLC.
5. Estudiar las correlaciones $\langle x(t)x(t') \rangle$ resultantes de una fuerza fluctuante sobre un oscilador armónico amortiguado. Para ello, se pueden seguir los siguientes pasos:

a) Considerar que, en promedio, la fuerza se anula, $\langle f(t) \rangle = 0$, pero que debido a que el medio es viscoso y la temperatura T es finita, las fluctuaciones de f no se anulan, $\langle f(t)f(t') \rangle \neq 0$. Suponer que la transformada de Fourier de las fluctuaciones es constante: $\langle f(\omega)f(\omega') \rangle = \sqrt{2}\eta k_B T$. Calcular entonces $\langle x(\omega)x(\omega') \rangle$ y, mediante el método de los residuos, $\langle x(t)x(t') \rangle$.

b) Considerar ahora el desplazamiento cuadrático medio dado por $\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle$ y demostrar que, en el límite de una partícula no ligada ($k \rightarrow 0$),

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = 4Dt$$

donde $D = mk_B T / \eta$ es el coeficiente de *difusión* en el medio viscoso. En su *annus mirabilis* (1905), Einstein publicó este resultado explicando el origen del movimiento *browniano* como consecuencia de fuerzas fluctuantes actuando sobre una partícula en un medio viscoso. Experimentalmente, se confirma que el desplazamiento de la partícula crece linealmente con el tiempo de acuerdo a la expresión anterior.

6.12. Nota histórica

George Green (1793-1841), de profesión molinero, fue un matemático inglés de formación autodidacta. Su obra más importante es una fundamentación matemática de la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo, en donde introdujo por primera vez el concepto de función potencial, una idea muy fructífera en

física. Debido a su lejanía de los círculos académicos, el valor de sus trabajos no se reconoció hasta varios años después de su muerte.

HABÍAMOS AVANZADO en el capítulo 2 que es muy difícil visualizar una función compleja arbitraria $f(z)$, a diferencia de lo que ocurre con funciones reales de una variable. La forma más eficaz de estudiar las propiedades de $f(z)$ se basa en interpretar *geoméricamente* la aplicación $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, investigando cómo se transforman dominios del plano $z: (x, y)$ al plano $w: (u, v)$, donde recuérdese que u y v son funciones de las variables x e y :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Por tanto, $f(z)$ *mapea* un punto (x, y) del espacio de números complejos z a un punto (u, v) del espacio de funciones u y v (ver figura 7.1). Tales mapeos, transformaciones o aplicaciones no son sólo una herramienta puramente formal sino que tienen aplicaciones prácticas desde el punto de vista de la física. Demostraremos en este capítulo que la aplicación más llamativa consiste en resolver la ecuación de Laplace en dominios no triviales.

7.1. Mapeo conforme

Definición. Un mapeo $w = f(z)$ se dice que es **conforme** en $z = z_0$ si f es analítica y $f'(z_0) \neq 0$. De forma equivalente, w es conforme en todos los puntos de un dominio \mathcal{D} si f es analítica y biyectiva en \mathcal{D} .

Los mapeos conformes tienen aplicaciones básicas en problemas de valores en la frontera (flujos, campos, etc.).

La importancia de los mapeos conformes proviene del hecho de que preservan los ángulos entre curvas en *magnitud* y *sentido*. Sin embargo, no toda transformación que preserve ángulos es conforme. Por ejemplo, $w = z^*$ no es conforme ya

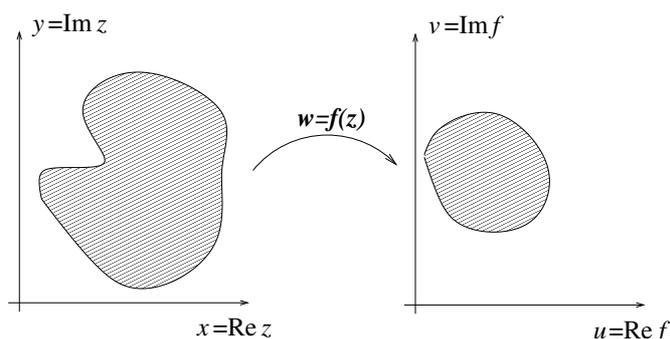


Figura 7.1: Mapeo general entre dos dominios arbitrarios de los planos z y w .

que no es analítica en ningún punto. Sin embargo, w describe una reflexión sobre el eje real y preserva ángulos.

¿Existe siempre un mapeo conforme que transforme un dominio dado \mathcal{D} en otro cualquiera \mathcal{D}' ? La respuesta la da uno de los teoremas más profundos, por su generalidad, del análisis de funciones complejas:

Teorema de Riemann. *Sea \mathcal{D} un dominio simplemente conexo excluyendo el caso en que \mathcal{D} sea todo el plano \mathbb{C} . Entonces, existe un mapeo conforme y unívoco $w = f(z)$ de \mathcal{D} al círculo $|w| < 1$ del plano w .*

Lo relevante de este teorema es comprender que nos garantiza la existencia de cualquier transformación, pues se sigue que si existe un mapeo $f(z)$ de \mathcal{D} al círculo unidad, entonces el mismo teorema nos garantiza la existencia de un mapeo $g(z)$ de \mathcal{D}' al mismo círculo. En consecuencia, los dominios \mathcal{D} y \mathcal{D}' quedan conectados por la transformación $w = f(g^{-1}(z))$.

Por ejemplo, por el teorema de Riemann sabemos que debe existir algún mapeo que transforme la silueta de la península ibérica en la de la isla de Mallorca (véase la figura 7.2), aunque dicho teorema sólo nos garantiza la existencia y no nos proporciona ningún método para calcular el mapeo. Existe, no obstante, una herramienta denominada **fórmula de Schwarz-Christoffel** con la que se puede construir el mapeo conforme del semiplano superior a una región poligonal arbitraria. En este capítulo vamos a ser menos ambiciosos y estudiaremos mapeos entre regiones con formas geométricas simples.

7.2. Transformaciones lineales

Sea la transformación

$$w = Az + B$$

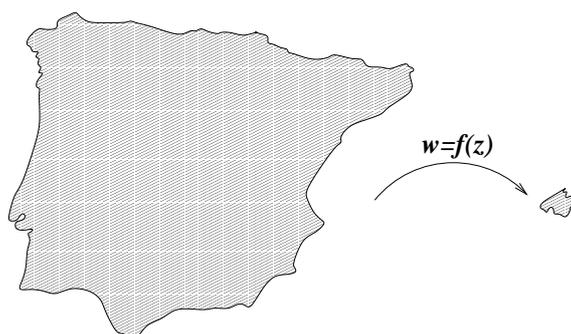


Figura 7.2: Ilustración del teorema de Riemann.

donde $A, B \in \mathbb{C}$ son constantes. Obviamente, w es conforme. Definimos $s(z) = Az$. Entonces, podemos expresar w como la transformación compuesta $w(s(z)) = s(z) + B$. Este tipo de razamientos analíticos serán muy útiles a lo largo del capítulo.

Estudiamos ahora cómo actúa $s(z)$ pasando A y z a coordenadas polares:

$$s = A \cdot z = ae^{i\phi} \cdot re^{i\theta} = are^{i(\phi+\theta)}$$

Se deduce de la expresión anterior que s toma un punto del plano z , lo rota un ángulo ϕ alrededor del origen y, a continuación, dilata o contrae su distancia al origen dependiendo de si $a > 1$ o $a < 1$.

Investiguemos ahora $w(s) = s + B$. Esta transformación toma un punto del plano s y le produce una traslación ya que en coordenadas cartesianas podemos escribir $B = b_1 + ib_2$ y $s = \sigma_1 + i\sigma_2$ de tal forma que $w = (\sigma_1 + b_1) + i(\sigma_2 + b_2)$, es decir, el punto (σ_1, σ_2) se transforma en el punto $(\sigma_1 + b_1, \sigma_2 + b_2)$.

En resumen, toda transformación lineal puede descomponerse en las siguientes transformaciones elementales: *dilatación*, *rotación* y *traslación*.

▷ EJEMPLO. Sea $w = f(z) = i(z + 2)$. Hallar el dominio \mathcal{D}' transformado a partir de $\mathcal{D} : \{x > 0\}$.

Se nos pide hallar \mathcal{D}' tal que $w : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ donde \mathcal{D} es el semiplano derecho. Descomponemos w introduciendo la transformación $s = g(z) = iz$. En coordenadas polares escribimos $z = re^{i\theta}$:

$$s = e^{i\pi/2} re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi/2)}$$

que describe una rotación de $+\pi/2$ alrededor del origen (en sentido antihorario), conservando el módulo. En consecuencia, \mathcal{D} pasa a ser el semiplano superior. Finalmente, $w = s + 2i$ traslada el semiplano superior dos unidades hacia arriba, por lo que, en el plano w , \mathcal{D}' toma la forma $\mathcal{D}' : \{v > 2\}$ (ver figura 7.3).

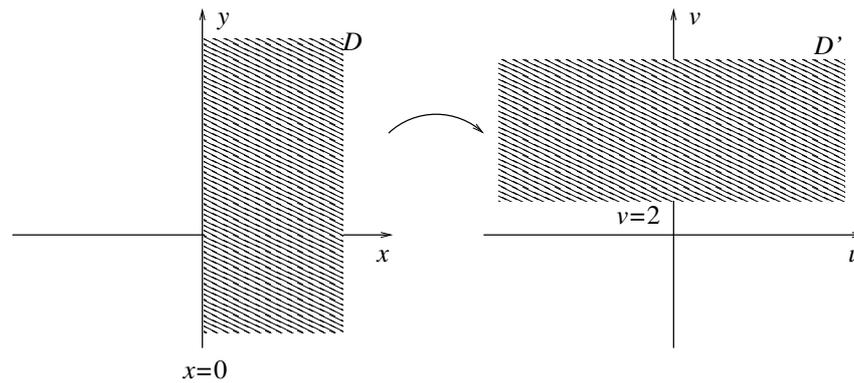


Figura 7.3: Transformación lineal.

7.3. Reflexión e inversión

Ya vimos en el capítulo 1 que la transformación $w = f(z) = z^*$ describía una **reflexión**. Efectivamente, en coordenadas polares podemos escribir

$$w = re^{-i\theta}$$

que conserva el módulo y transforma el argumento de z de θ a $-\theta$.

La **inversión** se logra mediante el mapeo $w = f(z) = 1/z$, ya que

$$w = \frac{1}{z} = r^{-1}e^{-i\theta}$$

En el párrafo anterior hemos visto que la transformación $\theta \rightarrow -\theta$ consiste en hacer reflejar un punto sobre el eje real. Si $r > 1$, los puntos del plano (x, y) que estén fuera del círculo de radio sufrirán una contracción y pasarán a encontrarse, en el plano (u, v) , en el interior del círculo del radio unidad. Al revés, si $r < 1$, los puntos que se sitúen dentro del círculo pasan a estar fuera de él.

7.4. Transformaciones bilineales

Generalizando las transformaciones anteriores, se pueden considerar los mapeos de la forma

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

que reciben el nombre de **transformaciones bilineales**, **homografías** o **transformaciones de Möbius**. En la ecuación anterior, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ son constantes que satisfacen la condición $ad - bc \neq 0$ para que exista la transformación inversa $w^{-1}(z)$.

Reescribimos w en la forma

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{c} \frac{acz + ad + bc - ad}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \underbrace{\frac{1}{cz + d}}_s \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \underbrace{\frac{1}{s}}_t \\ &= \frac{a}{c} + t \frac{bc - ad}{c} \end{aligned}$$

De esta expresión se infiere que, primero, s describe una transformación lineal; después, t produce una inversión; y, finalmente, w realiza una transformación lineal más.

- ▷ EJEMPLO. Sea $w = \frac{z-i}{z+i}$. Hallar el mapeo del dominio $\mathcal{D} : \{z = x + iy \mid y \geq 0\}$.

Estudiamos primero cómo se transforma el eje x :

$$\begin{aligned} z = x + i0 &\implies w = \frac{x-i}{x+i} = u + iv \\ &\implies |u + iv| = \frac{|x-i|}{|x+i|} = 1 \end{aligned}$$

Así pues, se deduce que $u^2 + v^2 = 1$, que es la circunferencia de radio unidad en el plano w .

En cuanto al resto de puntos, sabemos que $|z-i| \leq |z+i|$ para $y \geq 0$ ya que $|z-i|$ mide la distancia de (x, y) a $(0, 1)$ y $|z+i|$ la de (x, y) a $(0, -1)$. Entonces, \mathcal{D} se mapea en el plano w a $\mathcal{D}' : \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, que corresponde el círculo de radio unidad.

El ejemplo anterior ilustra la siguiente afirmación: *Las transformaciones bilineales mapean rectas y circunferencias en rectas o circunferencias, indistintamente.*

- ▷ EJEMPLO.

- Sea $w = \frac{i-z}{i+z}$. Hallar el mapeo del semiplano superior $\mathcal{D} : \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Expresamos w en la forma sugerida arriba:

$$w = \frac{i-z}{i+z} = \frac{-z-i+2i}{i+z} = -1 + \frac{2i}{z+i}$$

Definimos las siguientes transformaciones parciales:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(z) &= z + i \\ \mathcal{S}(z) &= 1/z \\ \mathcal{L}(z) &= 2iz \\ \tau(z) &= -1 + z\end{aligned}$$

w puede expresarse en función de las transformaciones anteriores como sigue.

$$w = \tau(\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathcal{T}(z))))$$

En consecuencia, \mathcal{D} sufre las siguientes transformaciones: (i) una traslación \mathcal{T} hacia arriba de valor $+i$; (ii) una inversión \mathcal{S} que mapea la región $\{\operatorname{Im} z \geq 1\}$ en el círculo $|z + i/2| \leq 1/2$; (iii) una rotación de ángulo $+\pi/2$ alrededor del origen seguida de una dilatación (duplicación del módulo) dada por \mathcal{L} y que nos lleva al dominio $|z - 1| \leq 1$; y (iv) una traslación τ hacia la izquierda de valor -1 . En definitiva, el mapeo conduce al dominio transformado $\mathcal{D}' : \{|w| \leq 1\}$.

De las transformaciones anteriores la menos obvia es la inversión $\mathcal{S}(z) = 1/z$ del dominio $\{\operatorname{Im} z \geq 1\}$. Vemos cómo se transforma la frontera del dominio, $\operatorname{Im} z = 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i \cdot 1} = \frac{x}{\underbrace{x^2 + 1}_u} + i \frac{-1}{\underbrace{x^2 + 1}_v}$$

donde hemos escrito $\mathcal{S} = u + iv$. Invirtiendo las expresiones anteriores, encontramos que

$$\begin{aligned}-\frac{v}{u^2 + v^2} = 1 &\implies u^2 + v^2 + v = 0 \\ &\implies u^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0\end{aligned}$$

La última ecuación corresponde a la circunferencia de radio $1/2$ y centrada en $(0, 1/2)$. Los puntos por encima de $\operatorname{Im} z = 1$ se mapean al interior de esta circunferencia, tal y como como habíamos afirmado antes. La transformación completa se presenta en la figura 7.4

7.5. Potencias y raíces

Si la transformación contiene potencias o raíces, es preferible, como ya sabemos, trabajar en la representación polar. Veamos un par de ejemplos.

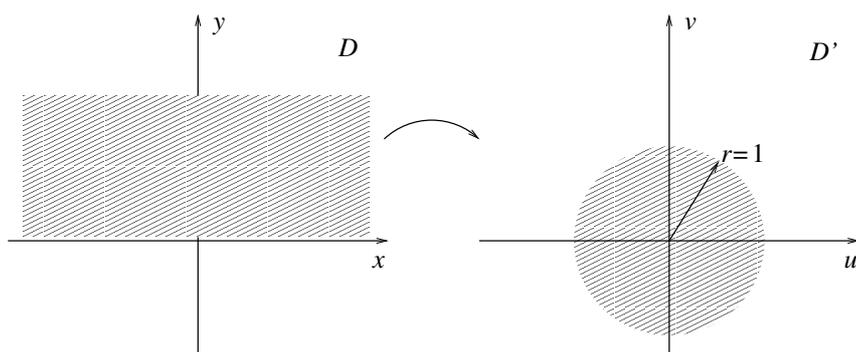
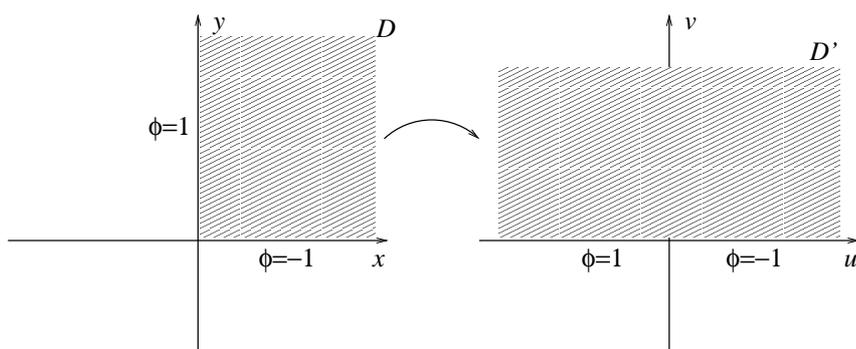


Figura 7.4: Transformación bilineal.

Figura 7.5: Transformación z^2 .

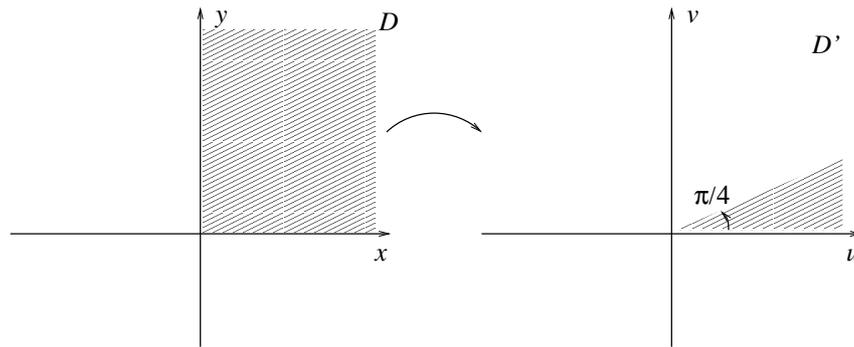
▷ EJEMPLO. Sea $w = z^2$. Hallar el mapeo del primer cuadrante del plano z , es decir, $\mathcal{D} : \{z = x + iy \mid x \geq 0, y \geq 0\}$.

En coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$ y la transformación toma la forma

$$w = r^2 e^{2i\theta}$$

Escribimos w en coordenadas polares: $w = \rho e^{i\phi}$. Entonces, identificando término a término en la ecuación anterior, deducimos que $\rho = r^2$ y $\phi = 2\theta$, por lo que w produce una dilatación y una duplicación del ángulo. Dado que el primer cuadrante corresponde a los valores $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$, el dominio transformado representa el semiplano superior: $\mathcal{D} : \{w = u + iv \mid v \geq 0\}$ ya que $\rho > 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$ (ver figura 7.5).

En general, la transformación z^n con $n \geq 2$ implica una dilatación y un aumento del ángulo. En cuanto a las curvas en el plano, es preferible utilizar coordenadas cartesianas. En el ejemplo anterior, la transformación pasa a ser $w = f(x, y) =$

Figura 7.6: Transformación $z^{1/2}$.

$x^2 - y^2 - 2ixy$, de donde $u = x^2 - y^2$ y $v = -2xy$. Luego w transforma hipérbolas del plano (x, y) en rectas del plano (u, v) .

▷ EJEMPLO. Sea $w = z^{1/2}$. Hallar el mapeo del primer cuadrante del plano z .

La transformación es bivaluada, de ahí que nos restrinjamos a la raíz principal, que, en coordenadas polares, toma la forma:

$$w = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

De la misma forma que en el ejemplo anterior, escribimos $w = \rho e^{i\phi}$ e identificamos $\rho = \sqrt{r}$ y $\phi = \theta/2$. En consecuencia, $\mathcal{D} : \{z = x + iy \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ pasa a ser el primer *octante* en el plano (u, v) , $\mathcal{D}' : \{w = \rho e^{i\phi} \mid \rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi/4\}$, tal y como se muestra en la figura 7.6.

De forma general, $w = z^{1/n}$ produce una contracción del módulo y una reducción del argumento de z .

7.6. Función exponencial

Sea

$$w = f(z) = e^z = e^x e^{iy}$$

Puesto que la función exponencial es periódica, este mapeo es conforme en un periodo en el que no se repita dos veces el mismo valor de e^z ; por ejemplo, $0 \leq \text{Im } z < 2\pi$.

En coordenadas polares escribimos $w = \rho e^{i\phi}$. Luego un dominio general $\mathcal{D} : \{z = x + iy\}$ del plano z se transforma en el dominio $\mathcal{D}' : \{w = \rho e^{i\phi} \mid \rho = e^x, \phi = y\}$ del plano w . Estas expresiones implican que una recta vertical en el plano z , $x = c$, donde c es una constante, se mapea en una curva del plano w descrita por las

ecuaciones $\rho = e^c = \text{const.}$ y $\phi = y$. Reconocemos en estas ecuaciones la fórmula de una circunferencia, ya que el radio es constante y el ángulo ϕ es variable. Por lo tanto, *la transformación exponencial mapea segmentos de rectas verticales en arcos de circunferencia.*

Considérese ahora una recta horizontal, $y = c$. Se deduce inmediatamente que, en el plano w , $\rho = e^x$ es una variable y $\phi = c$ es una constante. Estas ecuaciones equivalen a un **rayo** que comienza en $\rho = 0$ y acaba en $\rho = \infty$. *La transformación exponencial mapea segmentos de rectas horizontales en rayos.*

Combinando los resultados de los párrafos anteriores, se infiere que un dominio rectangular en el plano z se mapea a un sector circular en el plano w .

7.7. Función logarítmica

Sea

$$w = f(z) = \ln z = \ln |z| + i\theta$$

donde se ha utilizado la forma polar $z = |z|e^{i\theta}$. Escribiendo w en la forma $w = u + iv$, observamos que $u = \ln |z|$ y $v = \theta$. Tomemos el semiplano superior, que, en coordenadas polares, se expresa como $\mathcal{D} : \{z = re^{i\theta} \mid r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Entonces, w transforma \mathcal{D} en la región $\mathcal{D}' : \{w = u + iv \mid u = \ln r > 0, 0 \leq v = \theta \leq \pi\}$, que corresponde a una **banda** en el plano w . Igualmente, un rayo $\theta = \text{const.}$ del plano z se mapea a una recta horizontal $v = \text{const.}$ del plano w . Más adelante veremos un ejemplo práctico.

7.8. Funciones trigonométricas

Sea

$$w = f(z) = \text{sen } z = \text{sen } x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

De la definición de mapeo conforme se deduce que $\text{sen } z$ es conforme en todos los puntos que satisfagan $\cos z \neq 0$.

Hacemos la descomposición $w = u + iv$, de donde se derivan las expresiones

$$u = \text{sen } x \cosh y$$

$$v = \cos x \sinh y$$

Veamos cómo se transforman las rectas verticales $\mathcal{D} : \{x = c\}$ siendo c una constante:

$$\frac{u}{\text{sen } c} = \cosh y$$

$$\frac{v}{\cos c} = \sinh y$$

Sabemos que $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, así que el dominio transformado es

$$\mathcal{D}' : \left\{ \frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1 \right\}$$

que corresponde a *hipérbolas* con focos en $w = \pm 1$.

De igual forma, rectas horizontales en el plano z , $\mathcal{D} : \{y = c\}$, se transforman en *elipses* en el plano w :

$$\mathcal{D}' : \left\{ \frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1 \right\}$$

con focos en $w = \pm 1$.

▷ EJEMPLO. Hallar el mapeo de $\mathcal{D} : \{z = x + iy \mid -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y \geq 0\}$ bajo la transformación $w = \sin z$.

Determinamos cómo se transforman las semirrectas y el segmento de recta que forman la frontera de \mathcal{D} :

- Semirrecta $\{x = -\pi/2, y \geq 0\}$:

$$w = -\sin(\pi/2) \cosh y + i \cos(\pi/2) \sinh y = -\cosh y$$

Como $y \geq 0$, tenemos que $1 \leq \cosh y < \infty$. De ahí que se obtenga en el plano w la semirrecta $\{u < -1, v = 0\}$.

- Semirrecta $\{x = \pi/2, y \geq 0\}$:

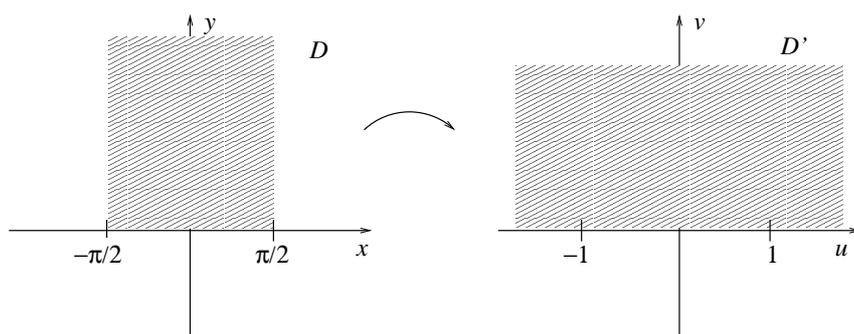
Siguiendo el razonamiento anterior, $w = \cosh y$. Luego la semirrecta se transforma en la semirrecta del plano w dada por $\{u > 1, v = 0\}$.

- Segmento $\{-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, y = 0\}$:

En este caso, la transformación se reduce a $w = \sin x$. Puesto que $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, se obtienen en el plano w las ecuaciones $\{-1 \leq u \leq 1, v = 0\}$, que representan un segmento horizontal en el plano w .

Combinando los resultados anteriores, se infiere que la frontera de \mathcal{D} se mapea al eje u en el plano w . Así pues, \mathcal{D}' será o bien el semiplano superior o bien el semiplano inferior. Para discernir entre las dos posibilidades, tomemos un punto arbitrario dentro de \mathcal{D} y veamos cómo se transforma. Sustituyendo $\{x = 0, y > 0\}$, el mapeo toma la forma $w = i \sinh y$, de donde se sigue que $v > 0$ pues $y > 0$. Por tanto, \mathcal{D}' es el semiplano superior, $\mathcal{D}' : \{\operatorname{Im} w \geq 0\}$, tal y como se muestra en la figura 7.7.

Las transformaciones asociadas a otras funciones trigonométricas y a las funciones hiperbólicas se deducen de las propiedades de $w = \sin z$. Veamos un ejemplo.

Figura 7.7: Transformación $\text{sen } z$.

- ▷ EJEMPLO. Estudiar de forma general las propiedades de la transformación $w = \cosh z$ basándose en las de $w = \text{sen } z$.

Nuestro objetivo es expresar $\cosh z$ en términos de la función seno. Utilizaremos las expresiones del capítulo 3:

$$w = \cosh z = \cos iz = \text{sen} \left(iz + \frac{\pi}{2} \right)$$

Definimos la traslación $t(z) = z + \pi/2$, la rotación $r(z) = iz$ y la transformación seno $s(z) = \text{sen } z$. Entonces,

$$w = s(t(r(z)))$$

es decir, un dominio dado sufre, por este orden, una rotación de $+\pi/2$ alrededor del origen, después una traslación de $+\pi/2$ y finalmente una transformación tipo seno.

7.9. Más sobre campos y fluidos

Entre las aplicaciones numerosas que ofrece el mapeo conforme, sobresale la posibilidad de resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Ya habíamos avanzado en la sección 2.8 que esta ecuación aparece frecuentemente en varias áreas de la física: conducción de calor, electrostática, gravitación y mecánica de fluidos. En problemas relacionados con estos capítulos, surge la necesidad de resolver la ecuación

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

donde ϕ es una función armónica que puede representar la temperatura estacionaria de una placa, el potencial electrostático o gravitatorio o la velocidad de un fluido ideal.

El método que vamos a exponer ahora es mucho más sencillo que resolver la ecuación en derivadas parciales. La única restricción es que su validez queda acotada a problemas en dos dimensiones o a problemas en tres dimensiones con simetría cilíndrica. También puede aplicarse como primera aproximación a problemas tridimensionales en los que la variación de ϕ a lo largo de la tercera componente espacial puede despreciarse frente a las variaciones en el plano.

Teorema. Sea $w = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica que mapea \mathcal{D} a \mathcal{D}' . Si $\Phi(u, v)$ es una función armónica en \mathcal{D}' , entonces

$$\phi(x, y) = \Phi[u(x, y), v(x, y)]$$

es armónica en \mathcal{D} .

Demostración. El teorema se puede probar calculando $\phi_{xx} + \phi_{yy}$ en términos de Φ_{uu} y Φ_{vv} y aplicando, a continuación, las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Sin embargo, es más rápido para dominios simplemente conexos emplear el siguiente razonamiento:

Por hipótesis, $\Phi(u, v)$ es armónica y podemos encontrar su armónica conjugada $\Psi(u, v)$ tal que la función

$$g(w) = \Phi(u, v) + i\Psi(u, v)$$

es analítica en \mathcal{D}' . Como f también lo es, $\Omega = g(f(z))$ es analítica por ser composición de dos funciones analíticas. De ahí que

$$\phi = \operatorname{Re}\Omega = \Phi[u(x, y), v(x, y)]$$

es armónica en \mathcal{D} . □

Al ser $\phi(x, y)$ armónica, existirá su armónica conjugada $\psi(x, y)$ pues $\Omega = \phi + i\psi$ es analítica. $\psi(x, y)$ representa las **líneas de fuerza** o de flujo o de nivel, y son perpendiculares a $\phi = \text{const.}$, que se denominan **curvas equipotenciales** (o isotermas en problemas de conducción de calor).

La resolución de la ecuación de Laplace debe cumplir condiciones de valores en la frontera de \mathcal{D} . Si se especifica el valor de la función a lo largo del contorno, entonces el problema recibe el nombre de **Dirichlet** mientras que si lo que se especifica es la *derivada* de la función, se dice que el problema es de **Neumann**. El siguiente teorema fija cómo se transforman las condiciones de contorno:

Teorema. Sea $w = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ un mapeo conforme sobre un contorno suave \mathcal{C} y sea \mathcal{K} la imagen de \mathcal{C} bajo w . Si a lo largo de $\mathcal{K}(u, v)$ se satisface o bien $\Phi = \Phi_0 \in \mathbb{R}$ o bien $\frac{d\Phi}{dn} = 0$ (derivada en la dirección perpendicular a \mathcal{K}) a lo largo de \mathcal{K} , entonces $\phi(x, y) = \Phi[u(x, y), v(x, y)]$ satisface, de

forma correspondiente, o bien $\phi = \phi_0 \in \mathbb{R}$ o bien $\frac{d\phi}{dn} = 0$ (derivada en la dirección perpendicular a \mathcal{C}) a lo largo de \mathcal{C} .

Demostración. El problema de Dirichlet se deduce inmediatamente del primer teorema.¹ \square

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones mediante mapeos conformes. Enumeramos las etapas que constituyen el procedimiento a seguir:

1. Hallar un mapeo conforme $w = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ que sea conveniente para pasar de un dominio complicado \mathcal{D} a uno, más simple, \mathcal{D}' .
2. Transformar las condiciones de contorno de \mathcal{D} a \mathcal{D}' .
3. Resolver el problema (más sencillo) de condiciones de contorno en \mathcal{D}' , es decir, determinar $\Phi(u, v)$.
4. Sustituir $u(x, y)$ y $v(x, y)$ en $\Phi(u, v)$ y, de este modo, encontrar $\phi(x, y)$.

El paso 1 tiene que ver con los mapeos que hemos estado estudiando a lo largo del capítulo. El paso 2 es el último teorema que hemos visto mientras que el paso 4 es una mera sustitución. Ilustremos el paso 3 con un ejemplo.

▷ EJEMPLO. Sea $\mathcal{D}' : \{0 \leq \text{Im } w \leq \pi\}$ un dominio en el plano (u, v) donde Φ toma los valores $\Phi = 0$ en el eje u ($v = 0$) y $\Phi = 1$ en la recta $v = \pi$. Hallar la función armónica Φ en todo el dominio.

Normalmente, \mathcal{D}' es un dominio sencillo, como el propuesto en este ejemplo, donde resolver la ecuación de Laplace es una tarea casi inmediata. Ésta es la ventaja del método basado en mapeos conformes. En este caso, desconocemos la transformación, y sólo nos piden hallar la función armónica Φ en \mathcal{D}' . Nótese que las condiciones de contorno son independientes de u , de modo que es razonable plantear de la hipótesis de que Φ es independiente de u en todo el dominio \mathcal{D}' . Por tanto, la ecuación de Laplace, $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$ toma la forma sencilla $\Phi_{vv} = 0$ que tiene, como solución general, $\Phi = Av + B$ siendo A y B son constantes que se determinan imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}\Phi(u, v = 0) = 0 &\implies A \cdot 0 + B = 0 \implies B = 0 \\ \Phi(u, v = \pi) = 1 &\implies A \cdot \pi + B = A \cdot \pi = 1 \implies A = \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

¹ Para la demostración concerniente al problema de Neumann, véase *Variable compleja y sus aplicaciones*, J. W. Brown y R. V. Churchill, ed. McGraw Hill, cap. 9.

En consecuencia, la función que buscamos es $\Phi(u, v) = v/\pi$, que es armónica y satisface las condiciones de contorno. ¿Existe alguna otra función que cumpla estas condiciones en \mathcal{D}' ? Afortunadamente, no. La solución, si existe, es única. Así pues, la solución encontrada es la única posible.

En los ejemplos de esta sección tomaremos ϕ , para concretar, como la representación del potencial eléctrico (aunque las soluciones son igualmente válidas a problemas equivalentes de termostática o hidrostática). Se sabe que el campo eléctrico viene dado por $\vec{E} = -\nabla\phi$. Por otro lado, la primera ley de Maxwell establece que $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, donde ρ es la densidad de carga y ϵ_0 es la constante dieléctrica. Calculando la divergencia de esta ecuación y usando la definición de ϕ obtenemos $\nabla^2\phi = 0$ en el caso en que no existan cargas libres ($\rho = 0$). La ecuación de Laplace resultante también es útil en situaciones en las que no existan cargas libres pero sí conductores, pues siempre se puede asociar una superficie equipotencial a cada uno de ellos.

▷ EJEMPLO. Dos placas semiinfinitas y de espesor despreciable se unen en el punto $(x = 1, y = 0)$ por medio de un material aislante de anchura cero. Se aplica a las placas el siguiente potencial: $\phi(x, y = 0) = 1$ si $x < 1$ y $\phi(x, y = 0) = -1$ si $x > 1$. Hallar $\phi(x, y)$ en la región $y \geq 0$ y esbozar las curvas equipotenciales y las líneas de campo.

Nótese la siguiente simetría del problema: si $z = x + iy = re^{i\theta}$, entonces el problema no depende de r puesto que ϕ es distinto sólo si variamos θ de 0 a π . Sin embargo, el origen está «desplazado» una unidad a la derecha. La transformación que traslada \mathcal{D} una unidad a la izquierda viene dada por el mapeo lineal

$$w = f(z) = z - 1$$

que es conforme ya que $f'(z) = 1 \neq 0$. Este es el paso 1 (encontrar un mapeo adecuado).

El paso 2 del método consiste en mapear las condiciones de contorno:

$$\Phi(u < 0) = 1 \quad \Phi(u > 0) = -1$$

De forma equivalente, en coordenadas polares ($w = \rho e^{i\varphi}$) estas condiciones se expresan así:

$$\Phi(\rho, \varphi = \pi) = 1 \quad \Phi(\rho, \varphi = 0) = -1$$

En el tercer paso hemos de hallar una función armónica Φ en \mathcal{D}' que cumpla las anteriores condiciones de contorno. En coordenadas polares la ecuación de Laplace toma la forma

$$\Phi_{\rho\rho} + \rho^{-1}\Phi_{\rho} + \rho^{-2}\Phi_{\varphi\varphi} = 0$$

Como Φ sólo depende de φ , la ecuación que debemos resolver es sencilla: $\Phi_{\varphi\varphi} = 0$, que tiene como solución $\Phi = A\varphi + B$, siendo A y B constantes por determinar:

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, \pi) = 1 &\implies A \cdot \pi + B = 1 \\ \Phi(\rho, 0) = -1 &\implies A \cdot 0 + B = -1\end{aligned}$$

La solución al sistema de ecuaciones anterior es $A = 2/\pi$ y $B = -1$, de modo que

$$\Phi = \frac{2}{\pi}\varphi - 1 = \frac{2}{\pi}\text{Arg}(w) - 1$$

Como $w = z - 1$, podemos sustituir inmediatamente para hallar $\phi(x, y)$:

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\pi}\text{Arg}(z - 1) - 1 = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctg\left(\frac{y}{x-1}\right) - 1 & \text{si } x > 1 \\ \frac{2}{\pi}\left[\pi + \arctg\left(\frac{y}{x-1}\right)\right] - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

y así completar el paso 4.

Recordemos del capítulo 3 que la armónica conjugada de $\text{Arg}(z)$ es $\ln|z|$ para que la función $\ln z$ sea analítica. Por tanto, $\phi = \text{Re}\Omega$ donde

$$\Omega(z) = -\frac{2i}{\pi}\ln(z - 1) - 1$$

es una función analítica. La función armónica conjugada de ϕ es, pues, $\psi = \text{Im}\Omega$:

$$\psi(x, y) = -\frac{2}{\pi}\ln\left[\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right]$$

Las curvas equipotenciales se derivan de la condición $\phi = \text{const.}$, es decir, $\text{Arg}(z - 1) = \text{const.}$, lo cual implica que las curvas equipotenciales son rayos surgiendo del punto $z = 1$. En cuanto a las líneas de campo, $\psi = \text{const.}$, se deduce que

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \text{const.}$$

que es la ecuación que describe circunferencias de radio variable centradas en $(1, 0)$.

- ▷ EJEMPLO. Hallar el potencial $\phi(x, y)$ en el primer cuadrante del plano donde los semiejes $x > 0$ e $y > 0$ forman dos planos conductores mantenidos a potencial $\phi = -1$ y $\phi = 1$, respectivamente.

Observamos que si el problema planteado tiene las mismas condiciones de contorno que el ejemplo anterior, pero el dominio, esta vez, es el primer

cuadrante en lugar del semiplano superior. Por tanto, buscamos una transformación conforme que nos lleve de un dominio al otro para sacar provecho de la solución que ya conocemos. Este mapeo viene dado por

$$w = f(z) = z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_u + i \underbrace{2xy}_v$$

que, como vimos más arriba, abre «en abanico» el primer cuadrante y lo transforma en el semiplano superior \mathcal{D}' . Del ejemplo anterior sabemos que la solución en \mathcal{D}' es

$$\Phi(u, v) = \frac{2}{\pi} \text{Arg}(w) - 1$$

En general, dado que $w = u + iv$, tenemos que

$$\text{Arg}(w) = \begin{cases} \arctg \frac{v}{u} & \text{si } u > 0 \\ \pi + \arctg \frac{v}{u} & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Sustituimos ahora w por z^2 . Debido a que $u = x^2 - y^2$, la condición $u > 0$ equivale a $x > y$ mientras que $u < 0$ equivale a $x < y$. En consecuencia, la solución definitiva es

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2} - 1 & \text{si } x > y \\ \frac{2}{\pi} \left(\pi + \arctg \frac{2xy}{x^2 - y^2} \right) - 1 & \text{si } x < y \end{cases}$$

A menudo no es posible encontrar un mapeo sencillo y es preferible recurrir a las tablas.²

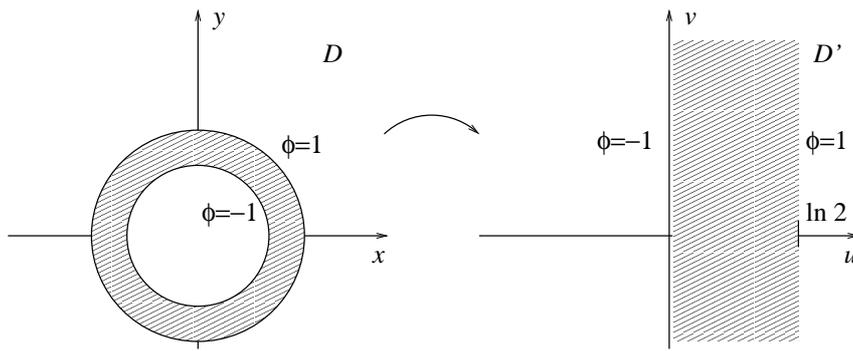
- ▷ EJEMPLO. Considerar el cable coaxial formado por un conductor exterior en forma de circunferencia de radio 2 y potencial $\phi = 1$ y un conductor interior circular de radio 1 y potencial $\phi = -1$. Hallar ϕ en la corona circular que limitan los dos conductores y esbozar las superficies equipotenciales y las líneas de campo.

Revisando las tablas, encontramos que un mapeo conveniente es

$$w = f(z) = \ln z = \underbrace{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}_u + i \underbrace{\text{Arg}(z)}_v$$

que mapea la corona circular \mathcal{D} en la banda vertical $\mathcal{D}' : \{0 \leq u \leq \ln 2\}$ (véase la figura 7.8) El contorno interior de la corona se transforma en la

² Véase, por ejemplo, *Variable compleja y sus aplicaciones*, J. W. Brown y R. V. Churchill, ed. McGraw Hill, apéndice 2.

Figura 7.8: Transformación $\ln z$.

recta $u = 0$ mientras que el exterior se transforma en la recta $u = \ln 2$. Por tanto, las condiciones de contorno en el plano w son:

$$\Phi(u = 0, v) = -1$$

$$\Phi(u = \ln 2, v) = 1$$

Como Φ no depende de v en la frontera, probamos con la función $\Phi = Au + B$, que es armónica en \mathcal{D}' . Hallamos las constantes:

$$\Phi(0, v) = -1 \implies A \cdot 0 + B = -1$$

$$\Phi(\ln 2, v) = 1 \implies A \cdot \ln 2 + B = -1$$

La solución es $A = 2/\ln 2$ y $B = -1$. Luego la función buscada en \mathcal{D}' es

$$\Phi(u, v) = \frac{2}{\ln 2}u - 1$$

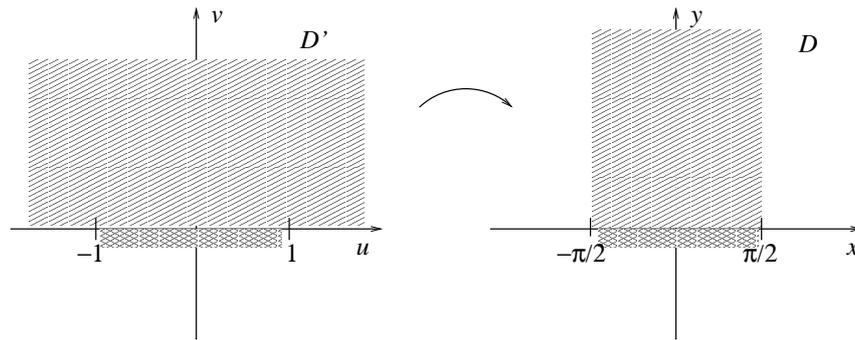
Entonces, usando la transformación anterior obtenemos

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\ln 2} \ln \sqrt{x^2 + y^2} - 1$$

Las superficies equipotenciales se infieren de la condición $\phi = \text{const.}$, de donde $x^2 + y^2 = \text{const.}$, es decir, son circunferencias centradas en el origen, como cabría esperar. En cuanto a las líneas de campo, primero hemos de hallar la función armónica conjugada:

$$\Omega(z) = \frac{2}{\ln 2} \ln z - 1 \implies \psi(x, y) = \frac{2}{\ln 2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Imponiendo $\psi = \text{const.}$, encontramos $y = (\text{const.}) \cdot x$, esto es, semirrectas que parten del origen. También de forma natural vemos que el campo resultante es radial.

Figura 7.9: Transformación arcsen z .

Para finalizar, veamos un ejemplo con condiciones de contorno de Neumann.

- ▷ EJEMPLO. Sean dos placas conductoras semiinfinitas con los siguientes potenciales: $\phi(x < -1) = 1$ y $\phi(x > 1) = -1$. En el espacio comprendido entre $x = -1$ y $x = 1$ se coloca un material perfectamente aislante. Hallar $\phi(x, y)$ en el semiplano superior.

Este ejemplo complementa el que resolvimos en la página 174 donde se despreciaba el tamaño de la placa aislante. Ahora lo tenemos en cuenta observando que la derivada de ϕ en la región aislante debe anularse: $d\phi/dn = 0$ para $-1 < x < 1$ (en este caso, n es la dirección perpendicular al eje x ; luego $\partial\phi/\partial y = 0$ para $y = 0$). Tenemos, por tanto, condiciones de contorno de Neumann en el intervalo $-1 < x < 1$ y de Dirichlet en el resto de la frontera.

Transformamos el dominio en uno más conveniente. Escogemos el mapeo $w = \text{arcsen } z$, mostrado en la figura 7.9, que transforma el semiplano superior en la banda semiinfinita $\mathcal{D}' : \{-\pi/2 \leq u \leq \pi/2, v \leq 0\}$. Las condiciones de contorno son $\Phi(u = \mp\pi/2) = \pm 1$ y $\partial\Phi/\partial v = 0$ para $v = 0$. En \mathcal{D}' la función Φ no debe depender de v : $\Phi(u, v) = Au + B$. Las condiciones de contorno dan como resultado

$$\Phi(-\pi/2, v) = 1 \implies A \cdot (-\pi/2) + B = 1$$

$$\Phi(\pi/2, v) = -1 \implies A \cdot (\pi/2) + B = -1$$

de donde deducimos que $A = -2/\pi$ y $B = 0$. Por tanto, la función

$$\Phi(u, v) = -\frac{2}{\pi}u$$

es armónica en \mathcal{D}' y satisface las condiciones de contorno del problema (las de Dirichlet y la de Neumann).

Para hallar $\phi(x, y)$ observamos que

$$w = \arcsen z \implies \sen(u + iv) = x + iy$$

de donde se tiene que

$$x = \sen u \cosh v$$

$$y = \cos u \sinh v$$

Eliminamos v elevando al cuadrado ambas ecuaciones y restando:

$$\frac{x^2}{\sen^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1$$

Sea $\eta = \sen^2 u$. Entonces, obtenemos la ecuación cuadrática

$$\eta^2 - \eta(x^2 + y^2 + 1) + x^2 = 0$$

de donde

$$\eta = \frac{1}{2} \left[x^2 + y^2 + 1 \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2} \right]$$

De los dos posibles signos, escogemos el signo $-$ puesto que para $y = 0$ nos da $\eta = 0$ y, por tanto, $\partial\phi/\partial y = 0$. Podemos reescribir la expresión anterior como

$$\eta = \left(\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2} \right)^2 = \sen^2 u$$

Luego la solución final es:

$$\phi(x, y) = -\frac{2}{\pi} \arcsen \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}$$

7.10. Aplicación: Fractales

Una aproximación distinta al análisis del comportamiento de funciones complejas basado en las propiedades de mapeo entre dominios del plano \mathbb{C} consiste en considerar $f(z)$ como una **iteración** o secuencia de puntos dada por $z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f(z_1), \dots$ y estudiar si la secuencia $\{z_k\}$, que traza una **órbita** en el plano, es convergente o divergente.

Para marcar la frontera entre una iteración convergente y una divergente hace falta estudiar los puntos fijos y los puntos de atracción de $f(z)$. Se dice que z_0 es un **punto fijo** de f si $f(z_0) = z_0$. Para este tipo de puntos la iteración es trivial: z_0, z_0, \dots . Por otro lado, z_0 recibe el nombre de **punto de atracción** (o punto fijo

asintóticamente estable) de f si $|f'(z_0)| < 1$. Se puede demostrar que si z_0 es un punto de atracción de f , entonces existe una región alrededor de z_0 tal que todas las iteraciones $\{z_k\}$ acaban, en el límite $k \rightarrow \infty$, en el punto z_0 . Esta terminología se utiliza frecuentemente en el estudio de sistemas dinámicos. Por ejemplo, si tenemos una partícula clásica confinada por un potencial $V(x) = x^2$ y utilizamos la variable temporal como índice de la secuencia, es evidente que el único punto fijo es $x = 0$ y, además, es punto de atracción en el caso que el amortiguamiento sea muy intenso.

Considérese el mapeo

$$f(z) = z^2 + c$$

donde $c \in \mathbb{C}$. Habíamos visto en este capítulo que el caso $c = 0$ corresponde a una transformación que mapea cuadrantes en semiplanos. Ahora vamos a analizarlo desde el punto de vista de las iteraciones. Si partimos de un punto z_0 en el interior del círculo unidad, entonces la secuencia generada converge al origen y está, por tanto, acotada. Si $|z_0| > 1$, la iteración rápidamente diverge. Por tanto, podemos dividir el plano \mathbb{C} en dos regiones dependiendo del comportamiento de $f(z)$ bajo iteraciones. Esto parece razonable, pues el mapeo no tiene una forma particularmente complicada.

Sin embargo, ahora vienen las sorpresas. Si suponemos que $c \neq 0$ y variamos c registrando las regiones del plano en las que la iteración esté acotada, nos encontramos diagramas de una complejidad extraordinaria, que hubieran sido impensables a priori viendo la forma inocente que tiene $f(z)$. La frontera entre las regiones de convergencia y divergencia se denomina **conjunto de Julia**. Así, el conjunto de Julia para $c = 0$ es simplemente la circunferencia de radio unidad. Pero véase ahora en la figura 7.10 el conjunto de Julia para $c = -1,25$. Este tipo de diagramas se obtienen con la ayuda del ordenador, discretizando una zona del plano en cuadrados o «píxeles» muy pequeños y asignando un color (negro o blanco) dependiendo de si la iteración generada por el punto inicial correspondiente al centro del cuadrado es convergente o divergente³. Obviamente, con un ordenador no se puede demostrar si una serie diverge. De ahí que se establezca una cota L de tal manera que si para algún punto de la iteración se cumple $|z_k| > L$, entonces se supone que dicha iteración diverge. Para el mapeo que estamos considerando se puede demostrar que es suficiente tomar $L = 2$. Asimismo, hay que tener en cuenta que el número de iteraciones que puede generar un ordenador es finito. Por eso, también colorearemos un cuadrado de negro si se ha alcanzado el límite máximo de iteraciones y la secuencia no ha superado la cota L (aunque nadie nos garantiza que esto no vaya a suceder si seguimos iterando; pero, como prime-

³ El método se puede sofisticar y asignar distintos colores con diferentes intensidades en función del número de iteraciones que se han necesitado para alcanzar la cota o basándose en algún otro criterio. Así, se pueden llegar a generar fractales de gran belleza.

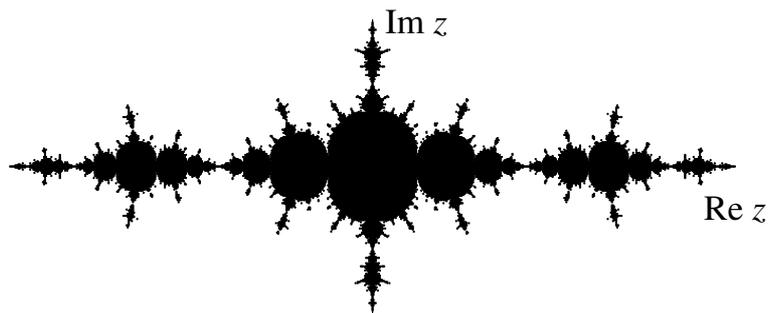


Figura 7.10: Conjunto de Julia correspondiente al mapeo $f(z) = z^2 + 1,25$.

ra aproximación, la suposición es válida). El algoritmo toma la siguiente forma cuando se escribe en pseudocódigo:

```

xmin,xmax,ymin,ymax : definen la región discretizada
xint,yint           : intervalo de discretización
itmax              : número máximo de iteraciones
d                  : si d=true, la serie diverge

start
asignar c
para x= xmin hasta xmax en intervalos de xint hacer
para y= ymin hasta ymax en intervalos de yint hacer
  definir z = (x,y)
  d = false
  i = 1
  mientras i <= itmax hacer
    w = z*z + c
    si módulo de w > 2 entonces
      u = true
      salir de mientras
    si no
      i = i + 1
      z = w
  si u=false pintar el píxel de negro
  si u=true pintar el píxel de blanco
end

```

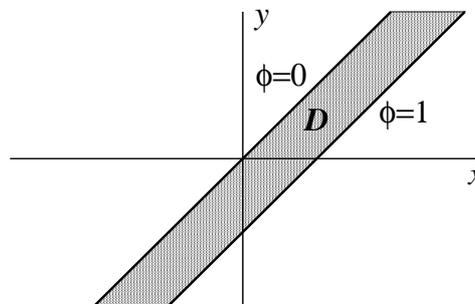
El lector puede intentar generar por sí mismo distintos conjuntos de Julia variando el parámetro c y observará la complejidad de algunos de ellos⁴. Por ejemplo, algunos presentan *autosimilaridad*, es decir, presentan una estructura fina que,

⁴ Para algunos valores de c se obtienen conjuntos desconexos. El **conjunto de Mandelbrot** es un diagrama en el plano c que describe qué conjuntos de Julia son conexos y cuáles no.

cuando es magnificada, resulta ser igual o parecida a la estructura grande. Como este efecto sigue ocurriendo a escalas arbitrariamente pequeñas, parece que ciertos conjuntos forman un complejo infinito de superficies. Esto lleva a pensar que, aunque se representen en un plano, la dimensión efectiva de estos objetos dista de ser igual a 2. Por ejemplo, está claro que la dimensión de una recta es 1 y la de una superficie bidimensional es 2, pero ¿qué dimensión podríamos asignar a un objeto que se replica infinitamente y, aun así, permanece acotado? Estos objetos se denominan **fractales** puesto que se puede demostrar que su dimensión contiene una parte fraccionaria. Los fractales están lejos de ser un mero divertimento abstracto ya que se pueden apreciar estructuras fractales en objetos naturales tales como cordilleras montañosas, perfiles costeros o incluso en sistemas biológicos como redes neuronales. En física, el estudio de los fractales está íntimamente ligado a la aparición de comportamientos *caóticos* de ciertos sistemas dinámicos. Se sabe que en estos sistemas las trayectorias tienen una sensibilidad exponencial a cambios diminutos en las condiciones iniciales y se ven atraídas a regiones del espacio de fases que tienen una estructura intrincada y que no son simplemente puntos o formas geométricas sencillas, sino que pueden representarse mediante fractales. Dichos atractores *extraños* se han observado en meteorología, sistemas electrónicos o reacciones químicas, por citar unos pocos ejemplos.

7.11. Problemas resueltos

- PROBLEMA. Sea \mathcal{D} la región comprendida entre dos placas conductoras representadas por las rectas $y = x$ e $y = x - \sqrt{2}/2$. El potencial ϕ se fija en las placas tal y como figura en el dibujo. (a) Hallar $\phi(x, y)$ en el domi-



nio \mathcal{D} utilizando la transformación $w = e^{i\pi/4}z$. (b) Esbozar las superficies equipotenciales y las líneas de campo asociadas.

Solución. (a) El mapeo es conforme y produce una rotación de $\pi/4$ alrededor del origen. El dominio transformado en el plano (u, v) es, pues, la región comprendida entre las rectas verticales $u = 0$ y $u = \sqrt{2}/2$. Como quiera que

las condiciones de contorno no dependen de v , la solución de la ecuación de Laplace $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$ es simplemente

$$\Phi = Au + B$$

donde las constantes A y B se obtienen a partir de las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}\Phi(u = 0, v) = 0 &\implies A \cdot 0 + B = 0 \implies B = 0 \\ \Phi(u = \sqrt{2}/2, v) = 1 &\implies A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + B = A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \implies A = \frac{2}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Resta determinar la función $u(x, y)$:

$$w = e^{i\pi/4} z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (x + iy) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) + i \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

Por tanto, $u(x, y) = (\sqrt{2}/2)(x - y)$ y concluimos que

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = \frac{2}{\sqrt{2}}u(x, y) = x - y$$

(b) Las superficies equipotenciales se hallan imponiendo $\phi(x, y) = \text{const.}$, de donde se deduce la ecuación $y = x + \text{const.}$, que corresponde a rectas de pendiente unidad, paralelas a las placas conductoras. Finalmente, las líneas de flujo se obtienen a partir de la función armónica conjugada de $\phi(x, y)$ que, como hemos visto más arriba, no es más que $\psi(x, y) = x + y$. Por tanto, las líneas de flujo $\psi(x, y) = \text{const.}$ se representan por la ecuación $y = -x + \text{const.}$, que tiene pendiente -1 puesto que las líneas de flujo deben ser perpendiculares a las superficies equipotenciales.

7.12. Ejercicios

1. Sea $w = \frac{i-z}{i+z}$. Hallar el mapeo del primer cuadrante del plano z .
2. Sea $w = \frac{z-R}{z+R}$. Hallar el mapeo del semicírculo superior $\mathcal{D} : \{z = re^{i\theta} \mid 0 < r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
3. Sea $w = \cosh z$. Hallar el mapeo del dominio $\mathcal{D} : \{x \leq 0, 0 \leq y \leq \pi\}$.

4. Sea \mathcal{D} el dominio tipo «cuarto creciente» formado por los puntos z exteriores a la circunferencia $|z-1|=1$ e interiores a la circunferencia $|z-2|=2$. El potencial de la circunferencia interior se fija a $\phi=0$ mientras que el de la exterior es $\phi=1$. Hallar $\phi(x,y)$ dentro de \mathcal{D} utilizando el mapeo bilineal $w = -i + \frac{4i}{z}$.
5. Sea \mathcal{D} el semiplano superior donde el potencial del eje x se fija de la siguiente forma: $\phi=1$ en el intervalo $-2 < x < 2$ y $\phi=0$ fuera de él. Hallar $\phi(x,y)$ y las líneas de campo asociadas mediante el mapeo $w = \ln\left(\frac{z-2}{z+2}\right)$.
6. Sea \mathcal{D} el dominio tipo «cuña» formado por los puntos $z = re^{i\theta}$ tales que $0 \leq \theta < \pi/4$ y $r \leq 2$. Los segmentos conductores $z = 2e^{i0}$ y $z = 2e^{i\pi/4}$ se mantienen al potencial $\phi=0$ y $\phi=1$, respectivamente. Supóngase que se construye el borde $r=2, 0 < \theta < \pi/4$ con un material aislante. Hallar $\phi(x,y)$ dentro de la cuña y determinar las líneas de campo y las curvas equipotenciales.
7. Estudiar la dimensión fractal del conjunto de Julia para diferentes valores de c . Se pueden seguir los siguientes pasos:

- a) Utilizar el criterio de Grassberger y Procaccia para calcular la dimensión fractal:

$$D = \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

donde $C(r)$ es el correlador definido mediante la expresión

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \theta(r - |z_i - z_j|)$$

siendo N el número de puntos del conjunto de Julia y $r > 0$. En la ecuación anterior $\theta(x)$ es la función theta de Heaviside y las sumas recorren todos los puntos del conjunto. Para valores intermedios de r el cociente anterior es una recta y la pendiente nos dará un valor aproximado, pero válido, de D .

- b) Representar D en función de c desde $c=0$ a $c=-2$ y razonar los valores de D en los extremos del intervalo.

7.13. Nota histórica

Gaston Julia (1893-1978), matemático francés. Tuvo que interrumpir sus estudios cuando le llamaron para servir en el frente durante la I Guerra Mundial, y allí perdió la nariz. En 1918 publicó un trabajo sobre el conjunto que lleva su nombre, aunque fue rápidamente olvidado. En los años 70, con la aparición de los ordenadores, el campo de los fractales se desarrolló increíblemente y el trabajo de Julia fue justamente reconocido.





Apéndice: Transformadas de Laplace

A.1. Definición y propiedades

Una transformación es una operación que toma una función y devuelve otra función. Por ejemplo, el operador derivada D transforma una función f en su derivada: $D[f(x)] = f'(x)$. Otra transformación importante es la operación de integración:

$$L[f(t)] = \int_0^s f(t) dt$$

A diferencia de la operación de derivación, la integral retorna una función cuya variable independiente no coincide con la variable original. En general, las transformaciones integrales contienen un **núcleo** o **kérel** $K(s, t)$ en el integrando:

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)K(s, t) dt$$

En el caso de la transformada de Laplace, el núcleo es una función exponencial real:

$$L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \equiv F(s)$$

En lo sucesivo, denotaremos con letra mayúscula la función resultante de la transformación y dejaremos las minúsculas para las funciones de partida. Aunque no es necesario para que la expresión anterior tenga sentido, es preferible definir la función f de tal forma que $f(t) = 0$ si $t < 0$. Como veremos a continuación, la

transformada de Laplace es una herramienta extraordinariamente útil en la resolución de ecuaciones diferenciales.

▷ EJEMPLO. Sea $f(t) = 1$. Calcular la transformada de Laplace $F(s)$.

Hemos de calcular la integral siguiente:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

El resultado tiene sentido siempre que $s > 0$. En caso contrario, la integral no converge. Esta restricción en el dominio de la transformadas de Laplace es una característica bastante común que aparecerá, a partir de ahora, con frecuencia.

▷ EJEMPLO. Sea $f(t) = e^{-at}$. Calcular $F(s)$.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a} \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

Nótese que a puede ser un número complejo.

▷ EJEMPLO. Sea $f(t) = t^n$, siendo n un entero no negativo. Calcular $F(s)$.

Integrando sucesivamente por partes, se obtiene:

$$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

La propiedad más importante de la transformada de Laplace es que se trata de una operación *lineal*. Sean a y b dos constantes arbitrarias; entonces

$$L[af(x) + bg(x)] = aL[f(x)] + bL[g(x)]$$

Podemos aprovechar esta consecuencia para generar nuevas transformadas a partir de resultados conocidos.

▷ EJEMPLO. Sea $f(t) = \operatorname{sen} at$. Calcular $F(s)$.

Se puede utilizar directamente la definición de F o bien emplear la propiedad anterior. Puesto que $\operatorname{sen} at = \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}$, escribimos

$$L[\operatorname{sen} at] = \frac{L[e^{iat}] - L[e^{-iat}]}{2i} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

para $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} a|$, donde se ha utilizado la transformada de Laplace de la función exponencial, hallada antes. De forma análoga, la transformada de $\operatorname{cos} at$ es

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} a|$$

En general, la integral $\int_0^R f(t)e^{-st} dt$ existe para $R < \infty$ si $f(t)$ es una función continua a tramos. Para que $F(s)$ exista se requiere, asimismo, que $f(t)$ no crezca más rápidamente que un múltiplo de alguna función exponencial, es decir:

$$|f(t)| \leq Me^{ct}$$

donde $M, c \geq 0$, en el límite $t \rightarrow \infty$. Se dice que f es *de orden exponencial* si verifica la desigualdad anterior. Así, t^n y $\sin at$ son de orden exponencial, pero e^{t^2} no lo es. Por tanto, se puede descartar que e^{t^2} posea transformada de Laplace. Si se cumple la condición anterior, $F(s)$ existe para $s > c$ y tiende a 0 cuando $s \rightarrow \infty$. Este resultado es útil para eliminar posibles transformadas. Por ejemplo, podemos estar seguros de que ni $\sin as$ ni e^{as} son las transformadas de Laplace de ninguna función, ya que no se anulan si $s \rightarrow \infty$.

La transformada **inversa** de Laplace es la operación invertida; esto es, si $F(s) = L[f(t)]$, entonces la transformada inversa es $L^{-1}[F(s)] = f(t)$. Hay diversas estrategias para hallar la función f a partir de la transformada F . Una fórmula conveniente se obtiene con ayuda del análisis de transformadas de Fourier y distribuciones, que damos aquí sin demostración¹:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{ts} ds$$

En la sección 6.7 se explica el método general de resolución de esta integral.

A.2. Resolución de ecuaciones diferenciales

Las transformadas de Laplace no pasarían de ser una mera curiosidad matemática si no fuera por la enorme potencia que exhiben en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Empecemos con las ecuaciones que dependen de coeficientes constantes y veamos que la transformada de Laplace es capaz de convertir una ecuación diferencial en una expresión algebraica, mucho más fácil de resolver.

Sea la ecuación genérica de segundo orden

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t)$$

siendo a, b y c constantes y $h(t)$ una función arbitraria. Nuestro objetivo es hallar la función desconocida $y(t)$. Ésta se determina completamente teniendo en cuenta dos condiciones iniciales: $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$.

¹ Véase, por ejemplo, M. L. Boas, *Mathematical methods in the physical sciences* (3.^a ed., Wiley, 2006), página 696 y ss.

El método se basa en hacer la transformada de Laplace a los dos lados de la ecuación anterior. Para ello, necesitamos primero calcular la transformada de la derivada de y integrando por partes:

$$L[y'] = \int_0^{\infty} y'(t)e^{-st} dt = ye^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt = -y_0 + sL[y]$$

Asimismo, operamos con la transformada de la segunda derivada de y :

$$L[y''] = L[(y')'] = sL[y'] - y'_0 = s(-y_0 + sL[y]) - y'_0 = s^2L[y] - sy_0 - y'_0$$

A fin de simplificar la notación, sea $Y \equiv L[y]$ y $H \equiv L[h]$. Sustituyendo las transformadas de Laplace de y'' , y' , y y h en la ecuación diferencial $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = h(t)$ obtenemos

$$as^2Y(s) - asy_0 - ay'_0 + bsY(s) - by_0 + Y(s) = H(s)$$

de donde $Y(s)$ se despeja con facilidad. La dificultad del método surge a la hora de deshacer la transformación y calcular la transformada inversa de $Y(s)$, es decir,

$$y(t) = L^{-1}[Y]$$

Existen diversos procedimientos, como la integral de Bromwich, desarrollada en la sección 6.7, y el método de fracciones parciales, que ilustraremos a continuación, para alcanzar el objetivo final de determinar $y(t)$.

▷ EJEMPLO. Resolver $y'' + y = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$.

Esta ecuación corresponde al problema del oscilador armónico de frecuencia unidad que parte del punto de equilibrio con una velocidad positiva. Como se sabe, $y(t)$ es una función sinusoidal (periódica) con el tiempo. Vamos a demostrarlo usando transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} L[y''] + L[y] &= 0 \\ s^2L[y] - sy_0 - y'_0 + L[y] &= 0 \\ s^2Y(s) - 1 + Y(s) &= 0 \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

En el tercer renglón, se ha sustituido y_0 e y'_0 por sus valores. Ahora resta determinar la transformada inversa de $\frac{1}{s^2 + 1}$. Precisamente, en el ejemplo de la página 188 concluimos que la transformada de Laplace de la función $\sin at$ era $\frac{a}{s^2 + a^2}$, con lo que la solución a nuestro problema es simplemente

$$y(t) = \sin t$$

Puede comprobarse que esta función satisface la ecuación diferencial del enunciado y las condiciones iniciales señaladas.

▷ EJEMPLO. Resolver $y'' + y = \sin 2t$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$

Este problema equivale a la ecuación de movimiento de un oscilador forzado periódicamente. La ecuación diferencial no homogénea resultante se puede resolver haciendo uso de las transformadas de Laplace:

$$\begin{aligned} L[y''] + L[y] &= L[\sin 2t] \\ s^2 Y(s) - 1 + Y(s) &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 4} \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

La transformación inversa puede realizarse recurriendo a la descomposición en fracciones simples. El segundo término de $Y(s)$ puede escribirse del siguiente modo:

$$\frac{2}{(s^2 + 4)(s^2 + 1)} = \frac{A}{s^2 + 4} + \frac{B}{s^2 + 1}$$

siendo A y B dos constantes a determinar. Se igualan los numeradores de los lados izquierdo y derecho:

$$2 = A(s^2 + 1) + B(s^2 + 4)$$

Como el miembro de la derecha es un polinomio de orden cero y el de la izquierda, uno de orden dos, el coeficiente que acompaña a s^2 debe anularse: $A + B = 0$. Por otro lado, los términos constantes han de igualarse: $2 = A + 4B$. De este par de ecuaciones se deriva el resultado $A = -2/3$ y $B = 2/3$. Así pues:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2}{3} \left(\frac{-1}{s^2 + 4} + \frac{1}{s^2 + 1} \right) = \frac{5}{3} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{2}{3} \frac{1}{s^2 + 4}$$

Ahora es más fácil la identificación. A $\frac{1}{s^2 + 1}$ le corresponde $\sin t$ mientras que la transformada inversa de $\frac{1}{s^2 + 4}$ es $\frac{1}{2} \sin 2t$. La solución final es:

$$y(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$$

Esta expresión satisface las condiciones en $t = 0$, como puede verificarse. Nótese también que el método de la transformada de Laplace proporciona de

forma automática tanto la solución general como la particular sin tener que hacer la distinción entre ellas al principio.

El cálculo de la transformada inversa también puede hacerse por residuos. Según los resultados de la sección 6.7, se tiene que

$$y(t) = \sum \text{Res}(Ye^{ts})$$

Tomemos $s \in \mathbb{C}$. La función $Y(s)e^{ts}$ tiene polos en $s = -2i, -i, i$ y $2i$. Calculemos sus residuos:

$$\text{Res}(Ye^{ts}, s = -2i) = \frac{1}{3} \frac{1}{2i} e^{-2it}$$

$$\text{Res}(Ye^{ts}, s = -i) = -\frac{5}{3} \frac{1}{2i} e^{-it}$$

$$\text{Res}(Ye^{ts}, s = i) = \frac{5}{3} \frac{1}{2i} e^{it}$$

$$\text{Res}(Ye^{ts}, s = 2i) = -\frac{1}{3} \frac{1}{2i} e^{2it}$$

La suma $\sum \text{Res}$ da en efecto la misma $y(t)$ que encontramos antes.

En los ejemplos anteriores, se ha podido observar que si $y(0) = 0$ la transformada de Laplace de la derivada es sencillamente $L[y'] = sL[y]$. El que la transformada de la derivada se obtenga mediante la multiplicación por s sugiere que la transformada de la integral se conseguirá dividiendo por s . Comprobemos si esta intuición es correcta. Sea $\varphi(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$. Entonces, $\varphi' = y$. Calculemos su transformada de Laplace:

$$L[\varphi'] = sL[\varphi] - \varphi(0)$$

Como $\varphi(0) = 0$, concluimos que $L[\varphi'] = sL\left[\int_0^t y(\tau) d\tau\right]$, es decir:

$$L\left[\int_0^t y(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} L[\varphi'] = \frac{1}{s} L[y]$$

Este resultado nos permite atacar ciertas transformadas inversas de manera más eficiente.

▷ EJEMPLO. Hallar $L^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right]$.

Sea $Y(s) = \frac{1}{s(s-1)}$. Puesto que en esta función aparece una división por s , la transformada inversa de $\frac{1}{s(s-1)}$ será igual a la integral de la transformada inversa de $\frac{1}{s-1}$:

$$L^{-1} \left[\frac{\frac{1}{s-1}}{s} \right] = \int_0^t L^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] d\tau$$

Ahora bien, la transformada de Laplace inversa ya fue calculada con anterioridad. Se trata de la función exponencial, e^t , por lo que obtenemos finalmente

$$L^{-1}[Y] = \int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1$$

Al mismo resultado se puede llegar descomponiendo en fracciones simples o por el método de los residuos. Invitamos al lector a que lo verifique por sí mismo.

Las transformadas de Laplace son incluso útiles en el análisis de ecuaciones diferenciales de orden más alto y en la resolución de *sistemas* de ecuaciones diferenciales. Veamos dos ejemplos.

▷ EJEMPLO. Resolver $y^{(4)} - y = te^t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

Con estos valores iniciales, sabemos que $L[y'] = sY(s)$ y $L[y''] = s^2Y(s)$. No es difícil convencerse que $L[y'''] = s^3Y(s)$ y $L[y^{(4)}] = s^4Y(s)$. Por otro lado, la transformada de Laplace de te^t puede hallarse directamente de la definición:

$$L[te^t] = \int_0^\infty te^{(1-s)t} dt = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \text{Re } s > 1$$

Usando estas relaciones, podemos reescribir la ecuación diferencial en el espacio de Laplace:

$$s^4Y - Y = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^4-1} \frac{1}{(s-1)^2}$$

La función Y tiene cuatro polos: tres simples en $-i$, i y -1 , y uno triple en

1. Hallamos sus residuos:

$$\text{Res}(Ye^{ts}, 1) = \frac{1}{16}e^t(2t^2 - 6t + 5)$$

$$\text{Res}(Ye^{ts}, -1) = -\frac{1}{16}e^{-t}$$

$$\text{Res}(Ye^{ts}, i) = -\frac{1}{8}e^{it}$$

$$\text{Res}(Ye^{ts}, -i) = -\frac{1}{8}e^{-it}$$

Sumando estas expresiones, escribimos la solución requerida:

$$y(t) = \frac{1}{8} \sinh t - \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{8} e^t (t^2 - 3t + 2)$$

▷ EJEMPLO. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y' + 2x = 1 & y_0 = 0 \\ 2y - x' = 2t & x_0 = 1 \end{cases}$$

Hallar $y(t)$ y $x(t)$.

Transformamos cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} sY + 2X = \frac{1}{s} \\ 2Y - (sX - x_0) = \frac{2}{s^2} \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} s^2Y + 2sX = 1 \\ 2s^2Y - (s^3X - s^2) = 2 \end{cases}$$

Tal y como puede comprobarse, hemos convertido un sistema de ecuaciones diferenciales en uno de ecuaciones algebraicas, cuya resolución puede llevarse a cabo con las técnicas habituales:

$$Y(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{4s(s^2 + 1)} \quad X(s) = \frac{s}{4 + s^2}$$

La transformada inversa de X es elemental: $x(t) = \cos 2t$. La de Y es algo más complicada, pero podemos extraer $y(t)$ de la segunda ecuación del sistema:

$$y(t) = \frac{2t + x'}{2} \implies y(t) = t - 2 \sin 2t$$

A.3. Derivadas, integrales y convolución

En la sección anterior se han derivado las transformadas de la derivada y la integral de una función dependiente de t . Sería también deseable conocer las expresiones correspondientes a la derivada y la integral de una transformada dada. La primera se obtiene derivando la definición de la transformada de Laplace bajo el signo de la integral:

$$F'(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}(-t) dt$$

De ahí que $F'(s) = L[-tf(t)]$. En general, la derivada enésima toma la forma

$$F^{(n)}(s) = L[(-1)^n t^n f(t)]$$

para n entero positivo.

▷ EJEMPLO. Hallar la transformada de Laplace de $t \operatorname{sen} at$.

Podemos aplicar la definición o bien advertir que la transformada de $\operatorname{sen} at$ es $\frac{a}{s^2 + a^2}$. Sea, pues, $f(t) = \operatorname{sen} at$. Empleando la fórmula de la derivada de F , se llega a

$$L[t \operatorname{sen} at] = L[tf(t)] = -F'(s) = -\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right)' = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Para este caso en particular, el método parece más rápido que la aplicación directa de la definición.

La derivada de la transformada puede utilizarse como medio de resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes sino que son, en realidad, polinomios de primer grado. Puesto que $L[ty(t)] = -(L[y(t)])' = -Y'(s)$ deducimos de aquí:

$$L[ty'] = -(L[y'])' = -\frac{d}{ds}(sY - y_0) = -\frac{d}{ds}(sY)$$

$$L[ty''] = -\frac{d}{ds}(s^2Y - sy_0 - y_0') = -\frac{d}{ds}(s^2Y - sy_0)$$

ya que y_0 e y_0' son constantes y su derivada con respecto a s es cero. Veamos con un ejemplo la aplicación de estas expresiones.

▷ EJEMPLO. Resolver $ty'' + 2(t-1)y' - 2y = 0$, $y_0 = 0$.

Se facilita una única condición inicial. Por eso, deberá aparecer una constante al final del cálculo. Escribamos primero la ecuación en el espacio de Laplace y operemos:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}(s^2Y - sy_0) - 2\frac{d}{ds}(sY) - 2sY - 2Y &= 0 \\ -(2sY + s^2Y') - 2(sY' + Y) - 2sY - 2Y &= 0 \\ -s^2Y' - 4sY - 2sY' - 4Y &= 0 \\ \frac{Y'}{Y} &= -2\frac{2s+2}{s^2+2s} \end{aligned}$$

Hemos logrado transformar una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes no constantes en una ecuación de primer orden separable, la cual se integra con rapidez notando que la derivada del denominador del término de la derecha está precisamente dada por el numerador:

$$\begin{aligned} \ln Y &= -2\ln(s^2 + 2s) + A \\ Y(s) &= \frac{B}{(s^2 + 2s)^2} \end{aligned}$$

donde A es una constante de integración y $\ln B = A$. La transformación inversa puede realizarse por cualquiera de los métodos explicados arriba. Es suficiente aquí dar el resultado final:

$$y(t) = B(\operatorname{sent} t - t \operatorname{cost} t)$$

Queremos ahora calcular la integral de la transformada de Laplace: $\int F(s) ds$. Previamente se ha demostrado que la derivada de F implica una multiplicación por t , así que parece razonable suponer que la integración de F involucrará dividir por t . Efectivamente, sea $g(s) = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$. Derivemos esta expresión:

$$\frac{dg}{ds} = L\left[(-t)\frac{f(t)}{t}\right] = -F(s)$$

de donde se infiere que

$$g(s) = -\int_a^s F(p) dp$$

para algún valor de a . Ahora bien, g tiende a 0 cuando $s \rightarrow \infty$. Por eso, imponemos $a \rightarrow \infty$ e invirtiendo los límites de integración se obtiene

$$g(s) = \int_s^\infty F(p) dp = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

Tal y como esperábamos, la integración de F acarrea dividir por t .

La fórmula que acabamos de demostrar resulta útil en la evaluación de ciertas integrales, ya que

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \int_s^{\infty} F(p) dp$$

Hagamos ahora $s = 0$. Entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} F(p) dp$$

▷ EJEMPLO. Calcular $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sent}}{t} dt$

Esta integral fue calculada en la página 142 mediante el método de integración por residuos. Vamos a utilizar aquí la expresión anterior en términos de la transformada de Laplace. Identificamos $f(t) = \operatorname{sent}$, cuya transformada, como sabemos, es $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$. Así, tenemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sent}}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Finalizamos este apartado con una breve exposición sobre la operación denominada **convolución**, una especie de producto generalizado definido entre funciones y que se denota por medio del símbolo $*$. Sean f y g dos funciones continuas a tramos y de orden exponencial. Entonces, la convolución de f y g se define como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

Calculemos la transformada de Laplace de esta expresión:

$$\begin{aligned} L[f * g] &= \int_0^{\infty} e^{-st} (f * g)(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau dt \end{aligned}$$

En la última línea hemos utilizado el hecho de que $g(\tau - t) = 0$ si $\tau > t$. Invertimos ahora el orden de integración:

$$L[f * g] = \int_0^{\infty} f(\tau) \int_0^{\infty} e^{-st} g(t - \tau) dt d\tau$$

Hagamos ahora el cambio de variable $u = t - \tau$ para la integración sobre t :

$$L[f * g] = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-su} g(u) du d\tau$$

Pero $g(u) = 0$ si $u < 0$, así que podemos convertir el límite inferior de la integral sobre u en 0:

$$L[f * g] = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} \int_0^{\infty} e^{-su} g(u) du d\tau = F(s)G(s)$$

Concluimos que la convolución de dos funciones viene dada por la transformación inversa del producto de las transformadas de Laplace:

$$(f * g)(t) = L^{-1}[F(s)G(s)]$$

Esta fórmula proporciona otro método adicional para el cálculo de transformadas inversas. Con todo, es mucho más útil para resolver ecuaciones integrales del tipo

$$f(t) = y(t) + \int_0^t y(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

donde f y g son funciones dadas e y es la función incógnita. Se transforma toda la ecuación anterior al espacio de Laplace:

$$\begin{aligned} L[f] &= L[y] + L[y * g] \\ F(s) &= Y(s) + Y(s)G(s) \\ Y(s) &= \frac{F(s)}{G(s) + 1} \end{aligned}$$

A continuación, realizamos la transformación inversa con el fin de obtener la solución $y(t)$.

▷ EJEMPLO. Resolver $e^{-t} = y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau$

Sean $f(t) = e^{-t}$ y $g(t) = 2 \cos t$. Sus transformadas de Laplace son, respectivamente, $F(s) = \frac{1}{s+1}$ y $G(s) = \frac{2s}{s^2+1}$. Por tanto, la transformada de $y(t)$ vale

$$Y = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{2s}{s^2+1}} = \frac{s^2+1}{(s+1)^3}$$

que tiene un polo triple en $s = -1$. Calculando su residuo determinamos $y(t)$:

$$y(t) = \text{Res}(Ye^{st}, -1) = (t-1)^2 e^{-t}$$

A.4. Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'' - y' - 2y = 0$ $y_0 = 0, y'_0 = 2$

b) $y'' + y = \cos 3t$ $y_0 = 1, y'_0 = 1$

c) $y'' + 4y' + 3y = 1$ $y_0 = 0, y'_0 = 0$

d) $y'' + 2y' + 2y = 2$ $y_0 = 0, y'_0 = 1$

e) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ $y_0 = y'_0 = y''_0 = 0, y'''_0 = 1$

f) $y' + 4y + 5 \int_0^t y dt = e^{-t}$ $y_0 = 0$

g) $\begin{cases} y' + x = 2 \cos t & y_0 = -1 \\ x' - y = 1 & x_0 = 1 \end{cases}$

h) $ty'' - (1 + 4t)y' + (2 + 4t)y = 0$ $y_0 = 0$

2. Resolver la siguiente ecuación integral.

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt$$

A.5. Nota histórica

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), considerado el Newton francés. Su obra monumental *Mecánica Celeste* es un compendio de la mecánica clásica basada en el cálculo infinitesimal y en donde logra demostrar la estabilidad del sistema solar. Defensor del determinismo científico, creía que las leyes de la naturaleza no requerían la existencia de Dios.



Soluciones a los ejercicios

Capítulo 0

1. El error se encuentra en el tercer paso. Recordar que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ si y solo si $a, b \geq 0$.

Capítulo 1

1. a) $2 - 3i$
b) $-4 + 5i$
c) $1 + 7i$
d) $-\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$
e) $\frac{7}{2}$
3. Recta $y = mx + b$ de pendiente m y ordenada en el origen b .
4. $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
 $-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
 $-\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
 $\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
6. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)$
 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1} + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}\right)$

Capítulo 2

1. a) f es derivable a lo largo de la recta $y = x$ y $f' = 2x$. f no es analítica.
 b) f es derivable y analítica en todo \mathbb{C} salvo en los puntos singulares $z = 0, \pm i$.
 c) f no es derivable.
 d) f es derivable y analítica si $a = -1$ y $b = 1$. $f' = 1 - i$ para todo z .
 e) f no es derivable.
 f) f es derivable en el primer y tercer cuadrantes (incluyendo el origen).
 f es analítica en esos cuadrantes exceptuando los ejes. $f' = 2x + i2y$.
2. $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$
3. $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - 2yx + 1 + i \left(x^2y - \frac{y^3}{3} - y^2 + x^2 + \frac{4}{3} \right)$
5. a) \vec{E} no es conservativo.
 b) \vec{E} es conservativo. Las líneas de flujo son hipérbolas.

Capítulo 3

1. $z = in\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
3. $e^{\pi(3+8n)} [\cos(2\ln 2) + i \operatorname{sen}(2\ln 2)]$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). El valor principal corresponde a tomar $n = 0$ en la expresión anterior.
4. $e^{i2n\pi^2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
5. $-\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) + \frac{i}{2} \ln 3$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Capítulo 4

1. a) 0
 b) $\frac{4i}{\pi} \cosh \frac{\pi}{2}$
2. a) $\frac{\pi i}{2}$
 b) 0
 c) $2\pi i$
 d) 0
 e) $2\pi i$

3. $2\pi i$

5. $|f(z)|_{\max} = 9, |f(z)|_{\min} = 1$

Capítulo 5

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$. Radio de convergencia $R = 2$.

2. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} z^{n-1}$

c) $\frac{1}{z} - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z^5} - \dots$

d) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{z^{2n}}$

3. $1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \dots$ Radio de convergencia $R = 1$. La primitiva es $F(z) = a_0 + z - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} - \dots$, donde a_0 es una constante.

Capítulo 6

1. a) Polos simples en $z_0 = 0, 1$ con residuos $\text{Res}(f, 0) = -1$ y $\text{Res}(f, 1) = 1$.

b) Polo simple en $z_0 = 0$ con residuo $\text{Res}(f, 0) = 1/16$ y polo doble en $z_0 = 4$ con residuo $\text{Res}(f, 4) = -1/16$.

c) Singularidad esencial en $z_0 = 0$ con residuo $\text{Res}(f, 0) = 1$.

d) Polos simples en $z_0 = 2, i, -i$ con residuos $\text{Res}(f, 2) = 1$, $\text{Res}(f, i) = i$ y $\text{Res}(f, -i) = -i$

3. a) $2\pi(2 - \sqrt{3})$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) 0

d) $\frac{\pi}{2e^4}$

e) $\frac{3\pi}{2e^2}$

f) $\frac{\pi^3}{8}$

Capítulo 7

1. $\mathcal{D}' : \{x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

2. $\mathcal{D}' : \{x \leq 0, y \geq 0\}$

3. $\mathcal{D}' : \{y \geq 0\}$

4. $\phi(x, y) = 2 - \frac{4x}{x^2 + y^2}$

5. $\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4y}{x^2 + y^2 - 1}, \psi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{(x-2)^2 + y^2}{(x+2)^2 + y^2}$

6. $\phi(x, y) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \psi(x, y) = -\frac{2}{\pi} \ln(x^2 + y^2)$

Apéndice

1. a) $y(t) = \frac{2}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}$

b) $y(t) = \operatorname{sen} t + \frac{9}{8} \cos t - \frac{1}{8} \cos 3t$

c) $y(t) = \frac{1}{6} (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$

d) $y(t) = 1 - e^{-t} \cos t$

e) $y(t) = \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{8} t \cos 2t$

f) $y(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}e^{-2t} \cos t - \frac{1}{2}e^{-t}$

g) $\begin{cases} y = t \cos t - 1 \\ x = \cos t + t \operatorname{sen} t \end{cases}$

h) $y(t) = Ct^2 e^{2t}$

2. $y(x) = \cos x.$

Índice alfabético

- absorción, 104
- analítica, continuación, 120
- analítica, extensión, 120
- analítica, función, 43, 50, 87, 90, 100, 104, 120, 172
- analítica, prolongación, 120
- ángulo imaginario, 65
- ángulo polar, 25
- antiderivada, 87
- antipartículas, 36
- arco, *véase* curva
- argumento, 25, 30
- armónica conjugada, 53
- armónica, función, 52, 172
- atractor, 182
- autosimilaridad, 181

- banda electrónica, 123

- camino, *véase* contorno
- campo, 56
- caos, 182
- ceros, 130
- ciclotómica, ecuación, 34

- circuito RLC, 73
- complejo conjugado, *véase* conjugado
- condensador, 73
- conjugado, 18, 19, 21, 30
- continuidad, 47
- contorno, 83, 91
- convergente, serie, 110
- convergente, sucesión, 109
- convolución, 197
- corte de rama, *véase* corte ramal
- corte de ramificación, *véase* corte ramal
- corte ramal, 69, 147
- coseno, 64
- coseno hiperbólico, 67
- criterio de la raíz, 111
- criterio del cociente, 111
- criterio del resto, 110
- cuaternión, 36
- cuerpo, 35
- curva, 82
- curva equipotencial, 57, 172
- curva suave, 83

- derivabilidad, 48
 desigualdad triangular, 24
 difracción óptica, 92
 dilatación, 163, 167
 Dirichlet, problema de, 172
 dispersión, 104
 divergente, sucesión, 109
 dominio, 44, 88, 91, 162

 ecuación de Laplace, 14, 52, 171
 ecuación diferencial, 189
 ecuación integral, 198
 ecuaciones de Cauchy-Riemann, 49
 electrostática, 56
 entera, función, 51, 63, 64
 exponencial, función, 63, 168
 exponentes complejos, 70

 fórmula de Cauchy generalizada,
 114
 fórmula de Euler, 63
 fase, 25
 fasor, 73
 fluido, 56, 171
 flujo, 56
 forma cartesiana, 44
 forma polar, 25, 29
 fórmula de Cauchy, 97
 fórmula de Cauchy generalizada,
 100
 fórmula de De Moivre, 32
 fórmula de Euler, 27
 fórmula de Schwarz-Christoffel, 162
 fórmula del residuo, 132
 formulación abstracta, 35
 fractal, 182
 función de Green, 151

 gases bidimensionales, 139

 hidrostática, 174
 hiperbólicas, funciones, 67

 holomorfa, véase analítica
 homografía, véase transformación
 bilineal

 imagen, 44
 imaginaria, parte, 17, 23, 110
 imaginario puro, 17
 índice de refracción, 103
 inductancia, 73
 ingeniería eléctrica, 73
 integral de Bromwich, 145
 integral de contorno, 84
 integral de Riemann, 83
 integral impropia, 137
 integral, definición de, 83
 integrales de Fresnel, 92
 interferencia, 31
 inversa, función, 72
 inversión, 164
 isomorfismo, 44
 isoterma, 172
 iteración, 179

 Julia, conjunto de, 180

 Kepler, tercera ley, 136
 kernel, 187
 Kirchoff, leyes de, 74
 Kramers-Kronig, véase relaciones
 de dispersión

 límite, 45
 lema de Jordan, 140
 logaritmo, 68, 169

 módulo, 21
 Mandelbrot, conjunto de, 181
 mapeo conforme, 161
 Marte, 37
 Maxwell, primera ley, 174
 mecánica cuántica, 14, 36, 122, 141
 meromorfa, función, 128

- módulo, 18
- módulo máximo, 102
- monovaluada, función, 70
- multivaluada, función, 68, 72
- Neumann, problema de, 172
- Newton, segunda ley, 153
- núcleo, 187
- número complejo, 17
- número primo, 145
- onda electromagnética, 31
- orden exponencial, 189
- orientación, 83
- oscilador, 31, 98, 149
- parametrización, 82, 95
- partículas, 123
- péndulo, 98
- periodo, 64, 65, 67
- permitividad, 103
- planetas, 36
- Poisson, kernel de, 136
- polinomio, 63
- polo, 128
- potenciación, 32
- potencial electrostático, 57, 171
- primitiva, 57, 87
- principal de Cauchy, valor, 137
- principal, argumento, 26, 30
- principal, determinación, 26, 69
- principal, parte, 119
- principal, raíz, 34
- principal, rama, 69
- principal, valor, 68, 70
- principio de causalidad, 104, 153
- punto de atracción, 179
- punto de rama, 69, 147
- punto de ramificación, véase punto de rama
- punto fijo, 179
- punto singular, véase singularidad
- radio de convergencia, 114
- raíz, 33
- real, parte, 17, 23, 110
- reflexión, 164
- regla de l'Hôpital, 55
- relaciones de dispersión, 104
- relatividad especial, 14, 36
- representación trigonométrica, 25
- residuo, 128
- resistencia, 73
- resonancia, 73
- rotación, 21, 163
- seno, 64, 169
- seno hiperbólico, 67
- serie de Laurent, 116
- serie de potencias, 112
- serie de Taylor, 113
- serie geométrica, 112
- singularidad, 51
- singularidad aislada, 128
- singularidad esencial, 129
- singularidad evitable, 128
- sistemas de ecuaciones
 - diferenciales, 193
- sistemas dinámicos, 180
- Sol, 37
- sucesión, 109
- sumable, sucesión, 110
- superficie de Riemann, 121
- susceptibilidad óptica, 103
- temperatura, 171
- teorema de Cauchy, 89
- teorema de Cauchy-Goursat, 89, 117, 132
- teorema de Green, 89
- teorema de Laurent, 116
- teorema de Liouville, 101
- teorema de los residuos, 132
- teorema de Morera, 100, 112

- teorema de Riemann, 162
teorema de Titchmarsh, 105
teorema del arco de Jordan, 88
teorema del módulo máximo, 102
teorema del valor medio, 94
teorema fundamental del álgebra,
101
teoría de respuesta lineal, 104
termostática, 174
Tierra, 36
- transformación bilineal, 164
transformación de Möbius, *véase*
transformación bilineal
transformación lineal, 162
transformada de Fourier, 150
transformada de Laplace, 187
transformada inversa de Laplace,
145, 189
traslación, 163
unidad imaginaria, 13