Notas de clase

Una pizarra en la que intercambiar experiencias docentes

La teoría de particiones explicada por los físicos estadísticos

lustración por gentileza de Alberto García Gómez (albertogg.com).

Raúl Toral
Instituto de Física Interdisciplinar
y Sistemas Complejos, IFISC (CSIC-UIB),
Palma de Mallorca, España

Siempre me ha intrigado el origen del nombre *función de partición* que se da en mecánica estadística a la suma sobre estados microscópicos de una cierta función. Por ejemplo, la suma sobre estados del factor $e^{-E/kT}$, siendo E la energía del estado microscópico en cuestión, se conoce como función de partición canónica Z. La suma sobre estados de $e^{-E/kT+\mu N/kT}$, siendo N el número de partículas del estado microscópico, es la función de partición macrocanónica Ξ. Aquí T es la temperatura, μ el potencial químico y k la constante de Boltzmann. El nombre de función de partición está extendido en varios idiomas aunque es sabido que la letra Z usada para denominar a la función de partición canónica proviene de la palabra alemana *Zustandsumme* o *suma sobre estados,* un nombre algo más anodino. Aunque no he visto en los libros de mecánica estadística que he consultado el origen del nombre "función de partición", rebuscando en internet [1] uno encuentra que el concepto puede estar vagamente relaciónado con la partición (la distribución) de la energía entre los diferentes niveles microscópicos.

Leyendo recientemente la interesante biografía del matemático indio Srinivasa Ramanujan [2] aprendí que, entre los muchos temas en los que trabajó durante su fértil estancia en Cambridge con el matemático ingles Godfrey Harold Hardy, sobresalían de manera especial sus contribuciones a la *teoría de particiones* y, en particular, a la determinación de la *función de partición*. Me pregunté enseguida si esta función de partición en la que había trabajado Ramanujan es la misma función de partición que aparece en los libros de mecánica estadística. Aunque no es el caso, y Wikipedia tiene dos entradas distintas para la función de partición en teoría de números y la función de partición en mecánica estadística [3], resulta que los dos conceptos están relaciónados entre sí. En esta Nota de Clase quiero indicar cómo se pueden reproducir algunos de los resultados ya conocidos de la función de partición de la teoría de números usando ideas de la función de partición de la mecánica estadística. Ya adelanto que no presentaré ningún resultado que no sea conocido por los matemáticos. Sin embargo, considero que esta manera de relacionar ambos campos tiene evidentes ventajas de comprensión para los físicos, que ven así cómo conceptos en los que han trabajado durante sus cursos de mecánica estadística pueden servirles para deducir algunas de las fórmulas que aparecen en un campo tan abstracto y de "matemáticas puras" como la teoría de particiones.

En matemáticas, una *partición* (o, más concretamente, una *partición entera*) de un entero positivo m es una manera de descomponer dicho número en sumandos positivos [4]. La *función de partición* $p(m)$ es el número total de particiones de m, es decir, el número de las diferentes maneras de descomponer m en sumandos positivos. Así $p(5) = 7$ ya que podemos separar 5 en los siguientes sumandos:

5
4 + 1
3 + 2
3 + 1 + 1
2 + 2 + 1
2 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1 + 1

La determinación de esta función de partición $p(m)$ fue uno de los trabajos en los que se embarcaron Ramanujan y Hardy logrando sustanciales avances. Aunque no hay una fórmula cerrada para $p(m)$ se conocen muchísimas propiedades de esta función. No es mi intención aquí dar ni tan siquiera una somera introducción al fascinante mundo de la función de partición en teoría de números (para lo que no tengo ni de lejos la formación adecuada), sino la de acercarnos modestamente a ella a través del conocimiento que, como físicos, hemos adquirido en los cursos de mecánica estadística. Para ello haremos una identificación entre los distintos sumandos que forman una partición y los niveles energéticos de un sistema ideal de partículas no interaccionantes.

Comencemos por una cuestión más sencilla: **¿De cuántas maneras $\Omega_0(m,N)$ se puede descomponer un número m en N sumandos teniendo en cuenta que los sumandos se pueden repetir y que importa el orden en que los consideremos?** Así $\Omega_0(5,3) = 6$ que corresponde a las particiones

3 + 1 + 1
1 + 3 + 1
1 + 1 + 3
2 + 2 + 1
2 + 1 + 2
1 + 2 + 2

Para hacer la identificación descrita, consideramos un sistema ideal de N partículas distinguibles cuyos niveles energéticos individuales son $\epsilon_\ell = \ell\epsilon = \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, 4\epsilon, \ldots$ (por ejemplo, los niveles de Planck de un sistema de osciladores armónicos unidimensionales, $\epsilon = h\nu$). La energía total es $E = \epsilon_1 + \ldots + \epsilon_N = \epsilon(\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_N)$. A cada una de las maneras anteriores de descomponer $m = 5$ en $N = 3$ sumandos le asociamos un estado microscópico del sistema de N partículas. Lo entendemos mejor con un ejemplo: a la partición $m = 3 + 1 + 1$ le asociamos el estado de un sistema de $N = 3$ partículas en el que la primera partícula esta en el estado $\ell_1 = 3$, la segunda en $\ell_2 = 1$ y la tercera en $\ell_3 = 1$. La energía total de este estado es $E = 3\epsilon + \epsilon + \epsilon = 5\epsilon = m\epsilon$. Queda claro entonces que el número de particiones del número m en N términos es igual al número de estados físicos con N partículas y energía $E = m\epsilon$. Por tanto, la determinación del número de maneras en que m se puede escribir como una suma de N términos, $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_N$ es equivalente a calcular el número de estados microscópicos $(\ell_1, \ldots, \ell_N)$ que tienen energía $E = m\epsilon$, la degeneración de la energía. Recordemos también que dentro del formalismo de la colectividad microcanónica, el logaritmo de la degeneración de la energía nos da la entropía mediante la relación de Boltzmann $S = k \log \Omega$. Como la mecánica estadística ha desarrollado herramientas para el cálculo de la degeneración Ω para distintos sistemas físicos, podemos aplicar esas herramientas para la determinación de la función de partición en teoría de números.

Las condiciones que supongamos para la partición entera determinan las propiedades adicionales que debe tener el sistema físico en cuestión. En el enunciado anterior importa el orden en que aparecen los sumandos y no deberíamos tener dificultad en entender que las N partículas que forman el sistema se han de considerar como distinguibles. Así, por ejemplo, dados $m = 5$ y $N = 3$ se consideran soluciones diferentes (i) 5= 1 + 1 + 3 donde las partículas 1 y 2 tienen energía ϵ y la partícula 3 tiene energía 3ϵ, y (ii) 5 = 3 + 1 + 1, donde la partícula 1 tiene energía 3ϵ y las partículas 2 y 3 tienen energía ϵ. Por tanto, para calcular la función $\Omega_0(m, N)$ debemos determinar la degeneración del estado energético $E = m\epsilon$ para un sistema de N partículas distinguibles con niveles energéticos individuales $\epsilon_\ell = \ell\epsilon$. Es este un ejercicio que hemos hecho todos en la carrera[1] y cuya solucion es $\Omega_0(m, N) = \binom{m-1}{N-1}$, $m \geq N$. Comprobamos que $\Omega_0(5; 3) = \binom{4}{2} = 6$ como habíamos encontrado directamente. Si queremos el número total de maneras $p_0(m)$ en que un número m se puede separar en cualquier número de sumandos $N = 1, \ldots, m$ importando el orden de los sumandos será $p_0(m) = \sum_{N=1}^{m} \binom{m-1}{N-1} = 2^{m-1}$.

El problema de las particiones contemplado por Ramanujan y Hardy es algo más complejo porque excluye considerar como diferentes aquellas sumas que sólo se diferencian en el orden de los sumandos. Es decir ahora 5 = 1+1+3 y 5 = 3+1+1 se considera la misma partición. Para ser concretos, planteemos la siguiente cuestión: **¿De cuántas maneras $\Omega_B(m, N)$ se puede descomponer un número m en N sumandos sin importar el orden de los mismos?** Podemos obtener la respuesta calculando, como antes, el número de estados de un sistema de partículas ideales con niveles energéticos $\epsilon_\ell = 1, 2, 3, \ldots$ conteniendo N partículas y energía $E = m\epsilon$ **pero sin distinguir qué partícula está en cada estado.** Cuando consideramos la partición 5 = 3 + 1 + 1 todo lo que decimos es que una partícula tiene energía 3ϵ y dos partículas energía ϵ, sin decir cuáles son esas partículas. En el lenguaje de la mecánica cuántica, estamos suponiendo que las partículas son indistinguibles. Puesto que permitimos que se repitan números en la partición (e.g. 5 = 3 + 1 + 1 repite el número 1 dos veces) debiera quedar claro que estamos considerando un sistema de bosones, donde dos o más partículas pueden ocupar un mismo nivel energético (en este caso el $\ell = 1$). Por ello utilizamos la notación $\Omega_B(m, N)$, donde el subíndice B hace referencia a la estadística de Bose. La función de partición p(m), o número total de particiones independientemente del número de sumandos es $p(m) = \sum_N \Omega_B(m, N)$.

Es cierto que es muy difícil calcular $\Omega_B(m, N)$ y, en particular, no se conoce su expresión explícita en el caso que nos ocupa. A pesar del desconocimiento de $\Omega_B(m, N)$ la maquinaria de la mecánica estadística nos permite deducir de manera exacta las propiedades termodinámicas de sistemas ideales de bosones y fermiones usando el formalismo de la colectividad macrocanónica. La teoría nos dice que los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función de partición macrocanónica Ξ son el número de estados Ω. Como sí que disponemos de una expresion para la función de partición macrocanónica Ξ_B para un sistema ideal de bosones, podemos a partir de su desarrollo en serie obtener los coeficientes $\Omega_B(m, N)$[2]. **La función de partición macrocanónica actúa**

1 Hay dos maneras de obtener $\Omega_0(m, N)$. La primera es por razonamiento directo. Representamos un número m mediante m puntos, por ejemplo 5 = •••••. Una partición en N sumandos consiste en añadir $N - 1$ símbolos + entre los $m - 1$ espacios que hay entre los puntos. Por ejemplo, para $N = 3$ la suma 5 = 3+1+1 se representa mediante •••+•+•. La manera de elegir $N - 1$ lugares para poner los símbolos de suma entre los $m - 1$ espacios posibles es $\binom{m-1}{N-1}$ como hemos usado en el texto.
La segunda manera de obtener la degeneración $\Omega_0(m, N)$ pasa por calcular primero la función de partición canónica. Sea $x = e^{-\epsilon/kT}$. Tenemos:

$$Z(x, N) = \sum_{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N} e^{-E/kT} = \sum_{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N} x^{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N} = \left[\sum_{\ell=1}^{\infty} x^\ell\right]^N = \left(\frac{x}{1-x}\right)^N. \qquad [1]$$

Sabemos la relación entre la función de partición canónica y el número de estados,

$$Z(x, N) = \sum_{E = m\epsilon} \Omega_0(m, N)\, e^{-\epsilon/kT} = \sum_m \Omega_0(m, N)\, x^m. \qquad [2]$$

Usamos el binomio de Newton $(1 - x)^{-N} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-N}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N+k-1}{N-1} x^k$ para desarrollar en serie

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^N = \sum_{\ell=1}^{\infty} \binom{N+k-1}{N-1} x^{k+N}$$

Haciendo ahora el cambio de variables $k + N = m$, sustituyendo en [1] e igualando con [2] obtenemos el resultado deseado.

2 En nuestros cursos de mecánica estadística [5] aprendemos a obtener una expresion cerrada para calcular la función de partición macrocanónica $\Xi(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z(x, N) z^N$ en el caso de un sistema ideal de bosones con niveles energéticos monoparticulares ϵ_ℓ:

$$\Xi_B(z, x) = \prod_\ell \left[\frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_\ell}}\right] = \frac{1}{\prod_\ell [1 - zx^\ell]},$$

siendo $z = e^{\mu/kT}$ la fugacidad. Desarrollando en serie,

$$\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{\infty} [1 - zx^\ell]} = \sum_{N=0}^{\infty} z_B(x, N) z^N,$$

y combinando con $Z_B(x, N) = \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_B(m, N) x^m$, nos lleva a

así como función generatriz de la función de partición de la teoría de números. Esta es la relación prometida entre la mecánica estadística y la teoría de números: Los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función de partición macrocanónica de un sistema ideal de bosones son las distintas maneras en que un número puede descomponerse en sumandos sin importar el orden de los mismos.

Ya hemos dicho que no podemos encontrar el término general del mencionado desarrollo en serie y dar una expresión cerrada para $\Omega_B(m, N)$ o $p(m)$. Los matemáticos han encontrado recurrencias entre diversos valores de $p(m)$, expresiones asintóticas o aproximadas y un sinfín de relaciones que no vamos a discutir aquí. Si queremos resultados explícitos para valores no demasiado altos de m o N podemos usar un programa simbólico para calcular los coeficientes del desarrollo en serie[3]. Resumimos en una tabla el resultado para la función de partición p(m) y las particiones $\Omega_B(m, N)$ de m en $N = 4$ sumandos para $m = 1,\ldots,20$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p(m)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627
$\Omega_B(m, 4)$	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64

Confirmamos de estas tablas que $p(5) = 7$. También vemos que $\Omega_B(7, 4) = 3$. Las tres maneras de separar $m = 7$ en $N = 4$ sumandos sin importar el orden son

$$\begin{gathered} 4+1+1+1 \\ 3+2+1+1 \\ 2+2+2+1 \end{gathered}$$

A veces se contemplan particiones restringidas donde los sumandos han de verificar alguna propiedad adicional. Por ejemplo, encontrar el número de particiones $p'(m)$ del número m en sumandos impares. Todo lo que tenemos que hacer es considerar que los niveles energéticos del sistema ideal cumplen la condicion requerida a los sumandos, en este caso $\epsilon_\ell = (2\ell - 1)\epsilon$. Usando el desarrollo dado por el programa simbólico[4] llegamos a los siguientes valores:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p'(m)	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64

Vemos, por ejemplo, que hay 4 maneras de partir 6 en números impares: 1 + 5, 3 + 3, 3 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.

Una aplicacion es la de comprobar (¡¡que no demostrar!!) la conjetura de Goldbach: Todo número par mayor que 2 se puede expresar como suma de dos primos. Sea $\Pi(m; N)$ el número de particiones de m en N sumandos primos. Su función generatriz la podemos obtener considerando la función de partición macrocanónica de un sistema ideal de bosones cuyos niveles energéticos monoparticulares sean los números primos $\ell_1 = 2\epsilon$, $\ell_2 = 3\epsilon$, $\ell_3 = 5\epsilon$, $\ell_4 = 7\epsilon,\ldots$[5] La conjetura de Goldbach se escribe como $\Pi(2m, 2) \geq 1$ si $2m > 2$. Un programa simbólico nos da la siguiente tabla[6] que verifica esa propiedad para $2m = 2,\ldots,40$.

2m	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
$\Pi(2m, 2)$	0	1	1	1	2	1	2	2	2	2	3	3	3	2	3	2	4	4	2	3

Por ejemplo, las $\Pi(14, 2) = 2$ maneras de descomponer 14 en dos primos son 3+11 y 7+7.

Para terminar vamos a plantear un tipo particular de partición restringida cuya función generatriz puede deducirse también fácilmente de los conocimientos de mecánica estadística. La cuestión es: **¿De cuántas maneras $\Omega_F(m, N)$ se puede descomponer un número *m* en *N* sumandos sin importar el orden de los mismos y sin que se repita ningún sumando?**

El físico reconocerá enseguida que, al no poder repetir sumandos, cada nivel energético solo puede estar ocupado por una partícula y estamos hablando, por tanto, de fermiones. Por el razonamiento anterior $\Omega_F(m, N)$ son los coeficientes del desarrollo en serie de la función de partición macrocanónica para un sistema ideal de fermiones Ξ_F (el subíndice F hace referencia a Fermi)[7]. El número total de particiones que no repiten números, independientemente del número

$$\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{\infty}[1 - zx^\ell]} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\Omega_B(m, N)x^m z^N .$$

Relación que nos dice que los coeficientes del doble desarrollo en serie de Taylor de la función de partición macrocanónica $\Xi_B(z, x)$ son $\Omega_B(m, N)$ o, en otras palabras, que $\Xi_B(z, x)$ es la función generatriz de $\Omega_B(m, N)$.

Si queremos el número total de particiones del número m, independientemente del tamaño N, nos basta con sumar para todos los valores de $N = 0, 1, 2, 3\ldots$, de manera que $p(m) = \sum_N \Omega_B(m, N)$. Esto se puede obtener si tomamos el valor de la fugacidad $z = 1$ en la expresion anterior de manera que:

$$\frac{1}{\prod_{\ell=1}^{\infty}[1 - x^\ell]} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\Omega_B(m, N)x^m = \sum_{m=0}^{\infty} p(m)x^m ,$$

o que $\Xi_B(z = 1, x)$ es la función generatriz de $p(m)$.

3 Para obtener $p(m)$ podemos usar el comando de Mathematica

```
p[m_]:= Coefficient[Series[ 1/∏_{ℓ=1}^{m} (1 − x^ℓ) , {x, 0, m}] , x^m],
```

y para $\Omega_B(m, N)$ usamos

```
OmegaB[m_, n_ ]:= Coefficient[Series[ 1/∏_{ℓ=1}^{m} (1 − z x^ℓ) ,
    {x, 0, m}, {z, 0, n}] , x^m z^n] .
```

Notemos que es suciente considerar el límite superior $\ell = m$ para obtener los coeficientes deseados.

4 El comando en Mathematica ahora es

```
p[m ]:= Coefficient[Series[ 1/∏_{ℓ=1}^{m} (1 − x^(2ℓ−1)), {x, 0, m}] , x^m] ,
```

donde hemos reemplazado ℓ por $2\ell - 1$ en la potencia de la variable x.

5 La expresion concreta es:

$$\frac{1}{\prod_{\ell \in \mathrm{Primos}}^{\infty}[1 - zx^\ell]} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\Pi(m, N)x^m z^N .$$

6 El comando en Mathematica ahora es

```
p[m_]:= Coefficient[Series[ 1/∏_{ℓ=1}^{PrimePi[m]} [1 − z x^Prime[ℓ]] ,
    {x, 0, m}, {z, 0, n}] , x^m z^n],
```

donde Prime[ℓ] representa el ℓ-ésimo número primo y PrimePi[m] es el número de primos que hay hasta m.

7 De nuestros cursos de mecánica estadística [5] sabemos que la función de partición macrocanónica para un sistema ideal de fermiones con niveles energéticos monoparticulares ϵ_ℓ es:

$$\Xi_F(z, x) = \prod_\ell [1 + ze^{-\beta\epsilon_\ell}] = \prod_{\ell=1} [1 + zx^\ell] ,$$

de sumandos, es $q(m) = \sum_N \Omega_F(m, N)$. Otra vez no podemos dar expresiones cerradas para $\Omega_F(m, N)$ o $q(m)$, pero valores explícitos para m o N no demasiado altos se pueden obtener mediante los coeficientes del desarrollo en serie obtenidos a partir de un programa simbólico[8].

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$q(m)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64
$\Omega_F(m, 4)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23

Vemos de estas tablas que el número de particiones en números distintos es igual al número de particiones en números impares, $q(m) = p'(m)$, un resultado bien conocido en la teoría de particiones [4]. Otro resultado, que podemos comprobar mediante la inspección de las tablas generadas en este y otros casos, indica que se cumple la relación $\Omega_B(m, N) = \Omega_F(m + \binom{N}{2}, N)$. Así, por ejemplo, $\Omega_B(7, 4) = 3$ (cuyas particiones ya escribimos anteriormente), es igual a $\Omega_F(7 + \binom{4}{2}, 4) = \Omega_F(13, 4)$, que son las siguientes particiones usando números no repetidos:

$$7 + 3 + 2 + 1$$
$$6 + 4 + 2 + 1$$
$$5 + 4 + 3 + 1$$

Como esto son unas notas de clase, y en el mejor estilo del plan Bolonia, me he permitido añadir unos ejercicios para que el lector compruebe por sí mismo si ha seguido la exposición. Se trata de escribir programas en Mathematica (u otro programa simbólico) que hagan lo siguiente:

- Comprobar la conjetura débil de Goldbach: todo número impar mayor que 7 se puede escribir como la suma de 3 números primos impares.
- Determinar el menor número natural que puede escribirse como suma de dos cuadrados de dos maneras distintas.

En resumen, en esta Nota de Clase nos hemos acercado al mundo de la función de partición de la teoría de números a través de la función de partición de la mecánica estadística. No son el mismo concepto, pero hemos visto que la función de partición macrocanónica de un sistema ideal sirve como función generatriz de la función de partición de un número. Qué tipo de partículas y niveles energéticos debemos considerar depende del problema en cuestión. Las expresiones conocidas para sistemas de partículas ideales indistinguibles cuánticas, bosones y fermiones, pueden desarrollarse en serie de Taylor con un programa de manipulación simbólica para obtener valores explícitos del número de particiones en algunos casos de interés.

cuyo doble desarrollo en serie nos da los coeficientes $\Omega_F(m, N)$, que son las particiones de m en N sumandos distintos:

$$\prod_{\ell=1}^{\infty} [1 + zx^\ell] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \Omega_F(m, N) x^m z^N .$$

Relación que nos dice que los coeficientes del doble desarrollo en serie de Taylor de la función de partición macrocanónica $\Xi_F(z, x)$ son $\Omega_F(m, N)$ o, en otras palabras, que $\Xi_F(z, x)$ es la función generatriz de $\Omega_F(m, N)$.
De la misma manera, si queremos el número total de particiones $q(m)$ de un número en números distintos, tendremos $q(m) = \sum_N \Omega_F(m, N)$, cuya función generatriz se encuentra haciendo $z = 1$ en la fórmula anterior

$$\prod_{\ell=1}^{\infty} [1 + x^\ell] = \sum_{m=0}^{\infty} q(m) x^m .$$

o que $\Xi_F(z = 1, x)$ es la función generatriz de $q(m)$.

8 El comando Mathematica para $q(m)$ es

`q[m_]:= Coefficient[Series[`$\prod_{\ell=1}^{m} (1 + zx^\ell), \{x, 0, m\}$`] ,` x, m`],`

y para $\Omega_F(m, N)$ usamos

`OmegaF[m_,n_]:= Coefficient[Series[`$\prod_{\ell=1}^{m} (1 + zx^\ell), \{x, 0, m\}, \{z, 0, n\}$`] ,` x^m, z^n`].`

Referencias

[1] Véase, por ejemplo, la discusión en http://goo.gl/QYFC68.

[2] *Robert Kanigel The man who knew innity* (Washington Square, 1992).

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Partition function.

[4] Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology* (CRC Press., 3.ª ed., 2005) La segunda edición se puede descargar (¡legalmente!) en https://www.math.upenn.edu/40wilf/DownldGF.html.

[5] Véase, por ejemplo, Carlos Fernandez Tejero y Marc Baus, *Física estadística del equilibrio* (Aula Documental de Investigación, 2000), fórmulas (6.85) y (6.86); Jordi Ortín y Jose María Sancho, *Curso de Física Estadística* (Edicions de la Universitat de Barcelona, 2001), fórmulas (5.68) y (5.70); R. K. Pathria y Paul D. Beale, *Statistical Mechanics* (Butterworth-Heinemann, 3.ª ed., 2011), fórmulas (16a) y (16b) de la sección 6.2.

Experiencia de aula: medidas del flujo de muones y sus variaciones en altura y estacionales

Jorge Barrio Gómez de Agüero
Profesor de Física y Química
del I.E.S. Manuel de Falla, Coslada

Eva López Pérez
Profesora de Física y Química
del I.E.S. José Saramago, Majadahonda

En el presente trabajo se exponen los resultados de diversos proyectos de investigación en física de partículas llevados a cabo con la participación de un grupo de alumnos y alumnas de bachillerato de las asignaturas de Técnicas Experimentales de 1.º y de Física de 2.º. Haciendo uso de un contador Geiger Muller comercial de bajo coste, se demuestra cómo podemos introducir, de una manera sencilla y atractiva, la investigación experimental en Física de partículas en los institutos. En concreto, se han medido las variaciones del flujo de muones en función de la altura, así como las posibles variaciones de dicha tasa a lo largo de un año (variación estacional).