Dinámica de opiniones y consenso: un problema de física estadística

Raúl Toral
IFISC (CSIC-UIB)
Palma de Mallorca

Hay un interés reciente, y creciente, en la aplicación de las técnicas de la física estadística para explicar la evolución y los cambios de opinión en una sociedad [7]. El motivo son las similitudes que aparecen con los típicos sistemas de física estadística. Una sociedad se puede pensar como un gran número de agentes que interaccionan entre sí. Los agentes de alguna manera son las unidades microscópicas y queremos explicar en función de ellas los cambios globales de opinión o tendencias que puedan observarse colectiva, macroscópicamente. Es precisamente esta conexión micro-macro, la explicación de fenómenos macroscópicos en términos de las propiedades microscópicas, el objetivo de la física estadística, aunque tradicionalmente las unidades microscópicas de esta disciplina sean átomos, moléculas, espines, etc., gobernados por una función hamiltoniana, y las propiedades macroscópicas que uno quiera explicar vayan desde los potenciales termodinámicos al coeficiente de difusión, la viscosidad, etc. Los "agentes" pueden ser personas, colectivos, grupos sociales o empresas, aunque en problemas de formación de opinión lo más extendido es identificar a las unidades microscópicas como individuos.

Las opiniones que un individuo pueda tener sobre unos determinados temas no son necesariamente estáticas, sino que pueden evolucionar debido a una serie de factores internos y externos como, por ejemplo, los debates que uno tenga con conocidos y la influencia de la publicidad. Como resultado de esta evolución, se puede llegar o no a una situación de consenso, entendida como una alta fracción de los individuos coincidiendo en la misma opinión. Asimismo, como consecuencia de la influencia de la publicidad, ésta puede hacer que los individuos cambien mayoritariamente su opinión o no.

Para analizar el proceso de formación de opinión se han introducido una variedad de modelos inspirados, como decíamos, en la física estadística. En esos modelos, la opinión que tiene un individuo se trata como una variable dinámica que evoluciona de acuerdo con algunas reglas, normalmente un mapa determinista en tiempo discreto, aunque se suele añadir algún elemento estocástico. Los modelos se dividen en dos grandes grupos: modelos discretos en los que la opinión sólo puede tomar un número finito de valores (incluso sólo dos) y modelos continuos en los que la opinión es una variable real en un intervalo cerrado. Los modelos discretos aparecen de una manera natural cuando nos enfrentamos a una elección entre varias posibilidades (qué partido político votar, Mac vs. Windows o Linux, beber vino o cerveza, etc.) mientras que los modelos continuos se aplican a un único tema (por ejemplo, legalizar el aborto) en el que las opiniones pueden cambiar continuamente desde "completamente a favor" a "completamente en contra". Importantes modelos continuos fueron introducidos por Deffuant y colaboradores [1, 2] y Hegselman y Krause [3]. Ambos grupos de modelos incorporan el mecanismo de "confianza limitada" por el cual sólo pueden interaccionar (y por tanto conseguir que la opinión de uno haga modificar la del otro) aquellos individuos cuyas opiniones no difieran en demasía. Esto quiere reflejar el que es imposible que un tertuliano de extrema derecha haga cambiar la opinión de un oyente de izquierdas. Las opiniones evolucionan debido a un proceso de discusión en unos grupos de debate. Dentro de un grupo de la interacción, cuyos participantes deben satisfacer entre sí el criterio de confianza limitada, se produce un acercamiento de las opiniones de los participantes hacia el valor promedio. La diferencia principal entre el modelo de Deffuant y colaboradores y el de Hegselman-Krause radica en la identificación de los grupos de debate. Mientras que en el primer modelo dos individuos cualesquiera pueden interaccionar (debatir, dialogar) independientemente de la distancia física entre ellos, en el segundo, el debate se produce dentro de un grupo definido por la proximidad geográfica de sus componentes (un club, el ámbito familiar, etc.), de manera que una persona se siente afectada por todos los integrantes del grupo. Los modelos predicen que, dependiendo del intervalo de confianza que permite la interacción, el sistema o bien alcanza un consenso perfecto o bien se separa en un pequeño número de subgrupos que (siendo internamente perfectamente homogéneos) mantienen distintas opiniones entre sí, de manera que no es posible la interacción entre subgrupos, una situación de polarización de las opiniones. Esta transición entre consenso y polarización comparte muchas de las características de un cambio de fase termodinámico, siendo posible definir parámetros de orden, exponentes críticos, etc. Es posible relajar el resultado poco realista de un perfecto consenso dentro de un subgrupo introduciendo reglas adicionales que incorporan elementos estocásticos en la evolución de las opiniones. Como consecuencia de ello, se identifica una nueva transición entre estados polarizados y estados de desorden en los que no se aprecia la formación de grupos de opinión bien definidos [20, 21, 22].

Es imposible resumir en un corto espacio todo el trabajo que se ha realizado en los, digamos, últimos diez o quince años sobre modelos de formación de opinión. Hemos decidido aquí fijar nuestra atención en dos modelos discretos que han sido propuestos recientemente, y en los que hemos contribuido con diversas publicaciones. El primero es el modelo de Galam de formación de consensos y cambios de opinión, y el segundo hace referencia al fenómeno de resonancia estocástica en sus diferentes versiones en un sencillo modelo de presión social.

Modelo de Galam de formación de consensos

El modelo introducido por Serge Galam [10, 11] quiere identificar mecanismos por los que una opinión, que es inicialmente minoritaria, puede convertirse en mayoritaria después de un cierto tiempo. Galam fue motivado a este estudio por la constatación de que las votaciones que se hacen en el seno de los diferentes comités de los partidos políticos siempre acaban arrojando una abrumadora mayoría hacia una de las opciones, aunque al inicio del proceso la opción finalmente ganadora no tenía ni de lejos la aprobación de la mayoría de los miembros del partido. Esto le da al proceso un aspecto poco democrático (las llamadas mayorías a la búlgara) que, en su opinión, no refleja la discusión profunda (y verdaderamente democrática) que se da en los partidos. Hay otros ejemplos (todos de principios de los años 2000) analizados por Galam en los que una opinión, aunque fuera inicialmente minoritaria, puede llegar a ser mayoritaria: el rechazo a tratados europeos en Irlanda, el voto negativo en Francia sobre la Constitución Europea, el cambio de opinión que se produjo en España sobre la autoría de los atentados del 11-M (aquí es necesario considerar, además, la existencia de unos medios de comunicación que adoptaban partido por una u otra opción), etc. El ingrediente básico en el modelo de Galam es la discusión organizada en pequeños grupos. Cada persona tiene una opinión inicial que puede verse alterada como resultado de dicha discusión. El punto clave del modelo es que, como resultado de la discusión, el grupo entero adopta una única opinión. Para simplificar las cosas, podemos pensar que hay dos opciones, A y B. La regla de adopción de una opción u otra por parte del grupo es una simple regla de mayoría: gana la opción que inicialmente tenía el mayor número de seguidores. ¿Qué pasa en caso de empate en el grupo? Entonces entra en juego un elemento de inercia social. Hay un sesgo hacia una de las dos opiniones, digamos A, correspondiente generalmente a la resistencia a los cambios o reformas. Por tanto, en caso de empate dentro del grupo, la decisión preferida (la que está en contra del cambio implicado en el proceso de decisión) es adoptada por todo el grupo. En la versión original de Galam, las personas se redistribuyen aleatoriamente en nuevos grupos y el proceso de discusión empieza de nuevo. Si definimos $p_A(t)$ como la proporción de personas que tienen la opinión favorecida A en el tiempo t y hay una probabilidad a_k de que la gente se reúna (aleatoriamente) en grupos de tamaño $k=1,\ldots,M$, es posible establecer una relación de recurrencia con el resultado de la interacción a un tiempo $t+1$. La probabilidad de que una persona tenga la opinión A dependerá de que en el grupo de tamaño k haya un número j de agentes con esa opinión que sea, bien mayoritario, o igual a la mitad si A es la opinión preferida en caso de empate, lo que dice que j puede valer $j=[(k+1)/2],\ldots,k$, siendo $[x]$ la parte entera por defecto del número real x. La relación de recurrencia es

$$p_A(t+1) = \sum_{k=1}^{M} a_k \sum_{j=\left[\frac{k+1}{2}\right]}^{M} \binom{k}{j} p_A(t)^j (1-p_A(t))^{k-j} \qquad (1)$$

Resulta que para un amplio rango de distribuciones de tamaños de grupos de discusión a_k, esta relación tiene tres puntos fijos: dos estables en $p_A = 1$ y $p_A = 0$ y uno inestable en $p_A = p_c$. Sea $p = p_A(0)$ la proporción inicial de partidarios de la opción A. El análisis de los puntos fijos de la relación de recurrencia nos indica que si $p > p_c$ la recurrencia tiende al punto fijo $p_A= 1$ (consenso en A), mientras que si $p < p_c$ tiende a $p_A= 0$ (consenso en B). Si definimos un *parámetro de orden* $\rho = \langle p_A(t\to\infty)\rangle$ como el promedio sobre realizaciones del proceso de discusión de la fracción de personas que van a adquirir la opinión A, después de muchas discusiones, la predicción de este análisis sencillo es que

$$\rho(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p > p_{c,} \\ 0, & \text{si } p < p_{c.} \end{cases}$$

El valor de p_c puede determinarse a partir de los números a_k. Si resulta que $p_c<1/2$, entonces para $p_c<p_A(0)<1/2$ se da la situación paradójica de que una opinión inicialmente minoritaria puede ser la ganadora asintóticamente. Es interesante cuantificar la velocidad de la aproximación a este punto fijo en función del tamaño de la población N. En el modelo original de Galam se obtiene una dependencia logarítmica con N del número de iteraciones necesarias para que surja el consenso (en una u otra opción). Un crecimiento logarítmico es moderado y Galam llega a calcular que, suponiendo una iteración por día, una población de millones de habitantes puede alcanzar un consenso casi completo en una semana, lo que está de acuerdo con el cambio de opinión generalizado observado en los ejemplos anteriores.

El modelo de Galam recoge, posiblemente en su versión más sencilla posible, un mecanismo de umbrales ya considerado por Granovetter [15] y Schelling [23]. En general, en un mecanismo de umbrales es necesario que la fracción de personas que hace que un individuo cambie de opinión sea mayor que un nivel de tolerancia intrínseco del individuo. Como es obvio, hay muchas simplificaciones en este modelo de Galam. Quizás la más importante sea la introducción de una reorganización aleatoria de los grupos de discusión. En otras palabras, que todos tienen la misma probabilidad de interaccionar (discutir) entre sí, lo que en física llamaríamos una hipótesis de campo medio, aunque es cierto que Galam combina este mecanismo de redistribución de las personas con una interacción que es puramente local, porque se produce en grupos de discusión de un tamaño reducido. Ha habido muchas extensiones y modificaciones del modelo de Galam. Queremos aquí mencionar el trabajo de Stauffer [24], que considera que las personas se pueden mover libremente en un retículo bidimensional que contiene más nodos que personas. De esta manera se forman grupos naturales de vecindad en los que las personas discuten. Modelos que incluyen movilidad de las personas fueron también analizados en Chopard y Galam [8, 9]. Otra variante, considerada también por Galam y analizada por Stauffer y Sá Martins [12, 25] incluye la presencia de "inconformistas" (*contrarians*, en la notación original), un tipo de personas que podríamos calificar de "tocapelotas" cuya opinión es siempre contraria a la mayoría. La inclusión de un número suficiente de este tipo de individuos lleva a empates técnicos entre las dos opiniones, algo que, en opinión de Galam, explica que se hayan producido resultados cercanos al 50 % en muchas elecciones entre dos opciones, a pesar de que éste es un evento que tiene una muy baja probabilidad.

En el sencillo análisis de campo medio reflejado en el mapa (1), no hay dependencia explícita con el tamaño de la población. En Tessone [26] estudiamos mediante simulaciones numéricas las consecuencias de las reglas de discusión de Galam cuando consideramos una población de tamaño finito N. Nuestro resultado se puede resumir en una ley de escala para la fracción final ρ de partidarios de la opción A en función de p, la fracción inicial, como $\rho(p, N) = f((p-p_c)N^{-1/2})$, siendo f la función de escala. Esto implica que hay una región de valores de p de tamaño $N^{-1/2}$, donde los resultados del consenso pueden diferir de lo que obtenemos en el límite $N\to\infty$. La segunda modificación al análisis de campo medio incorporada en Tessone [26] se refiere a la consideración de la movilidad limitada de las personas. Esto lo hacemos introduciendo *modelos de vecindad* donde los ámbitos de discusión se modifican en cada iteración para simular el hecho de que uno no discute siempre con las mismas personas, aunque se mantiene localizado en una cierta región geográfica. La conclusión principal de este modelo de vecindad es que la ley de escala se modifica como $\rho(p, N) = f(pN^{\alpha})$, siendo α un exponente que depende del tamaño medio de los grupos de discusión y de los detalles del proceso de cambio de los ámbitos de discusión. Si fuéramos a analizar esta ley de escala con las reglas usuales de la física estadística, lo primero que haríamos sería tomar el límite termodinámico $N,V\to\infty$, siendo V el volumen total del sistema, manteniendo constante el cociente V/N. Si hiciéramos esto, obtendríamos que el valor crítico p_c que separa la tendencia media a alcanzar el consenso en A o en B, escala como $p_c \sim N^{-\alpha}$, por lo que al aumentar N el punto crítico tiende a p_c=0, o, en otras palabras, desaparece la transición puesto que siempre se verifica que $p>p_c$. De la misma manera, el tiempo necesario para alcanzar el consenso resulta que, en vez de logarítmicamente, escala como $T \sim N^{\beta}$, siendo $\beta \approx 1.6$, por lo que, estrictamente hablando, el tiempo en alcanzar el consenso diverge en el límite termodinámico o, dicho de otra manera, nunca se alcanzaría el consenso. Sin embargo, hay que recalcar que al analizar la dinámica de sistemas sociales, esta manera de proceder es incorrecta. No se debe tomar el límite termodinámico. Hay que tener en cuenta que el número de agentes involucrados en un problema de interés en las ciencias sociales nunca puede ser del orden del número de Avogadro, la referencia en problemas de física estadística. Valores realistas de N están, generalmente, en el rango de centenas, miles o, quizás a lo sumo, millones. No es sólo que el límite termodinámico no esté justificado, es que el tomarlo puede hacer que obtengamos resultados incorrectos. En el modelo de Galam, podemos predecir, incorrectamente, que la opinión preferida *siempre* es la consensuada, independientemente de la fracción inicial de partidarios. Es cierto que una auténtica transición de fase requiere de las singularidades matemáticas que sólo se dan en el límite termodinámico, pero es posible observar en sistemas finitos auténticos cambios de comportamiento que pueden bien pasar por transiciones de fase, sin serlo. Esto, que siendo la excepción, ocurre en algunos problemas de física estadística (un ejemplo lo tenemos en el modelo de seno de Gordon en una dimensión analizado en [4]) es un fenómeno común en el estudio de sistemas sociales [29].

Resonancia estocástica en formación de opinión

Uno de los resultados más sorprendentes de la física estadística de los últimos años es el descubrimiento de que es posible inducir orden en un sistema macroscópico aumentando el desorden microscópico. El primer ejemplo de este contraintuitivo fenómeno se formuló independientemente en 1981 por dos grupos de investigadores liderados, respectivamente, por Benzi [5] y Nicolis [18] sorprendentemente con la misma aplicación a la comprensión del origen del periodo observado en los ciclos glaciares. En su versión más sencilla (hay un amplio artículo de revisión en Gammaitoni [13]), se considera un sistema biestable sujeto a un forzamiento periódico de amplitud A y frecuencia Ω y fluctuaciones en forma de ruido blanco de intensidad D. El modelo concreto es

$$\dot{x} = x - x^3 + A\sin(\Omega t) + \sqrt{2D}\xi(t). \qquad (2)$$

En ausencia de ruido, si la amplitud del forzamiento no es lo suficientemente grande, no es posible modular transiciones entre los dos estados estables $x=-1,+1$. En ausencia de forzamiento, el término de fluctuaciones induce transiciones estocásticas entre los dos estados estables con un tiempo característico de salto entre transiciones, el tiempo de Kramer, $\tau_K \sim e^{\Delta V/D}$, siendo ΔV, la altura de la barrera del potencial que separa los dos estados estables. Cuando incluimos fluctuaciones y una pequeña modulación podemos tener una resonancia si se da la condición de que medio periodo del forzamiento sea del orden del tiempo de Kramer. Parece intuitivo pensar, y efectivamente es el caso, que un valor muy pequeño de las fluctuaciones tendrá un efecto inapreciable, mientras que un valor muy grande hará que la dinámica esté dominada por el ruido y sea imposible establecer ninguna regularidad en el movimiento. Es para valores intermedios de la intensidad D del ruido cuando se observan unos saltos entre estados estables altamente sincronizados con el forzamiento externo. Éste es el fenómeno conocido como *resonancia estocástica* [32]. Hay otros interesantísimos ejemplos de transiciones de fase hacia un estado ordenado inducidas por fluctuaciones [6, 14], pero esto no nos concierne en el presente artículo.

Es posible obtener un resultado análogo en modelos sencillos de dinámica de opinión discreta. Podemos entender los dos estados estables, ±1, como las dos posibles opiniones que tenga un individuo sobre un tema. Necesitamos, primero de todo, una dinámica que conduzca a esos dos estados estables, por ejemplo, la dinámica del modelo de Galam. Sin embargo, es posible todavía simplificar más la modelización y considerar una dinámica simple de mayorías. Por ello entendemos que cada persona puede tener una opinión (las llamaremos ±1, en vez de A y B, como antes) y que dicha opinión evoluciona mediante la interacción con un conjunto de vecinos con los que debate. La regla es de mayoría: una persona adopta la opinión sostenida por la mayoría de su entorno (en caso de empate, no modifica su opinión). Esta sencilla regla lleva, cuando no hay ningún otro ingrediente más, a que toda la población adopte eventualmente una única opinión (se supone que la población no se puede separar en dos o más grupos inconexos). Que la opinión de consenso final sea +1 o −1 depende de la condición inicial y del orden particular en que se produzcan los debates entre individuos. Si llamamos $s_i(t)=\pm 1$ a la opinión que tiene la persona i=1,...,N, en el tiempo t, la iteración es tal que en el tiempo $t+\delta t$ adoptamos la regla de evolución dada por el mapa:

$$s_i(t+\delta t) = \text{signo}\left[\sum_{j\in n(i)} s_j(t)\right] \qquad (3)$$

donde $n(i)$ denota la vecindad de i, el conjunto de vecinos con los que debate. Se pueden tomar redes de interacción (o estructuras de vecindad) más o menos complicadas o realistas, pero para el fenómeno que queremos estudiar es suficiente considerar la red cuadrada en la que que cada nodo tiene cuatro vecinos (los cuatro nodos más próximos en la red). Los resultados son cualitativamente similares en otros tipos de redes. δt no hace más que fijar la escala temporal. Puesto que la anterior regla se aplica a una sola persona a la vez, seleccionada al azar entre todas las posibles, tomaremos $\delta t=1/N$, que indica que el tiempo se mide en debates por persona.

El ingrediente del forzamiento externo lo podemos asimilar, sin ninguna dificultad, a la presencia de publicidad. La publicidad es un elemento que nos quiere impulsar a tomar una determinada opción (beba Pepsi Cola o Coca Cola) y para ello invierte unos recursos que podemos tomar representativos de la amplitud del forzamiento. También admitimos que la publicidad viene dada por una función estrictamente periódica de frecuencia Ω. Ciertamente, las campañas publicitarias no son continuas en el tiempo pero una modelización mediante una función periódica es suficiente para el fenómeno de resonancia que queremos estudiar. Por todo ello, consideramos la siguiente regla adicional

Con probabilidad $|A\sin(\Omega t)|$,
adoptar $s_i(t+\delta t) = \text{signo}\,[\sin(\Omega t)]$. (4)

Por último necesitamos el ingrediente de las fluctuaciones. Éstas las entendemos como términos adicionales impredecibles en la dinámica. Pueden responder, por ejemplo, a un elemento de libre albedrío donde uno actúa independientemente de lo que le dicte su entorno o la publicidad. Por tanto, la última regla del modelo es

Con probabilidad η, adoptar un valor
aleatorio:
$s_i(t+\delta t) = +1$ o $s_i(t+\delta t) = -1$ (5)

Cada una de estas tres reglas (3-4-5) son el equivalente de los distintos términos considerados en el modelo (2) de resonancia estocástica: biestabilidad, forzamiento periódico y ruido. La amplitud del forzamiento A se toma suficientemente pequeña, de manera que empezando, por ejemplo, en el estado $s_i(0)=+1$, para todo valor de $i=1,...,N$, es tal que no se consigue hacer que una fracción mayoritaria adopte nunca el valor −1, lo que podríamos denominar como *publicidad subliminal o subumbral*. Como el mecanismo que lleva a la resonancia estocástica es genérico, se ha podido demostrar [17] que estas reglas para nuestro sencillo modelo de dinámica de opiniones son tal que se obtiene una resonancia para un valor adecuado de la intensidad de las fluctuaciones, medida aquí por el parámetro η, la probabilidad de tomar una opción de manera aleatoria. Es importante resaltar que la respuesta de la población a la publicidad se cuantifica por el porcentaje de personas que adoptan una u otra opinión, relacionado con la respuesta promedio $m(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i(t)$, una clara invitación a considerar que $s_i(t)$ son variables de espines de un modelo de Ising y $m(t)$ la magnetización. Una de las maneras de cuantificar la respuesta es la de ajustar $m(t) = m_0 \sin(\Omega t+\phi)$ y observar cómo depende la amplitud m_0 de los distintos parámetros y factores (por ejemplo, la estructura de la red de conectividades). El resultado de Kuperman [17] implica un máximo, una resonancia, de m_0 cuando se estudia su variación con respecto a η.

Hay otras maneras de considerar elementos de aleatoriedad en este modelo. Mencionaremos aquí tres modificaciones recientes que hemos introducido en el modelo anterior, todas ellas conducentes a un efecto similar de resonancia estocástica: *(i)* interacciones competitivas, *(ii)* efecto del tamaño de la población, *(iii)* efecto de la diversidad en las acciones individuales. De las tres, nos centraremos con más detalle en la tercera, pero mencionamos ahora brevemente las dos primeras.

(i) Interacciones competitivas. Notemos que el efecto principal de la regla estocástica (5) es el de impedir que la población llegue a un consenso total. Hay otras maneras de conseguir el mismo efecto y es la de hacer que algunas personas intenten hacer lo contrario de lo que hacen otras. Este mecanismo está bien asentado en la dinámica social (urjo a los lectores a que analicen en qué momento han tomado una decisión sencillamente porque era la contraria a la que sostenía una persona a la que tienen una tirria especial). Esto lo modelamos introduciendo una matriz de interacciones κ_{ij}, que inicializamos a:

$$\kappa_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } 1-\eta \\ -\kappa, & \text{con probabilidad } \eta \end{cases}$$

siendo $\kappa>0$ una constante. La regla de evolución de las opiniones (3) se modifica a:

$$s_i(t+\delta t) = \text{signo}\left[\sum_{j\in n(i)} \kappa_{ij}\, s_j(t)\right]. \qquad (3')$$

y no es necesario incluir ahora la regla (5) estocástica. El efecto desordenador se mide con el parámetro η, que es así el equivalente a la intensidad de las fluctuaciones. Si $\eta=0$, tenemos el modelo original que alcanza un consenso completo, mientras que, a medida que aumenta η, se va haciendo cada vez más imposible conseguir un estado en el que una gran mayoría comparta la misma opinión. Los ingredientes esenciales de la resonancia estocástica siguen presentes en este modelo y no es de extrañar que se encuentre que la respuesta a la publicidad tenga un máximo para un valor intermedio de η. A este efecto le llamamos "Divide y vencerás" [34]. La introducción de un pequeño número de interacciones competitivas entre las personas hace que sea más fácil la penetración de un mensaje publicitario.

(ii) Efecto del tamaño de la población. En física estadística, es bien sabido que las fluctuaciones relativas en un sistema macroscópico disminuyen con el tamaño del sistema y, en general, escalan como $N^{-1/2}$, siendo N el número de constituyentes. Si no insistimos en tomar el límite termodinámico y consideramos sistemas finitos, podemos controlar la intensidad relativa de las fluctuaciones variando el tamaño. Como la resonancia estocástica se asocia a un valor óptimo de la intensidad de las fluctuaciones, resulta que es posible obtener una respuesta óptima variando el tamaño del sistema. Este es el mecanismo de la resonancia inducida por tamaño descubierta en [19] y generalizado a otros efectos ordenadores de las fluctuaciones [33]. La verdad es que no necesitamos explicar mucho más. Otra vez tenemos todos los ingredientes presentes en nuestro sencillo modelo de formación de opiniones: biestabilidad, forzamiento y fluctuaciones (inducidas por tamaño finito). No es de extrañar, pues, que se observe un máximo de la respuesta m_0 como función de N manteniendo todos los otros parámetros fijos [27]. Otra vez, este resultado indicaría que es más fácil influir con una publicidad no demasiado intensa sobre las poblaciones que no son ni muy grandes ni muy pequeñas.

(iii) Efecto de la diversidad en las acciones individuales. Cuando consideramos sistemas de muchos constituyentes en un problema típico de física estadística, la hipótesis usual es que son idénticos. Desde un punto de vista fundamental, los átomos y moléculas que constituyen un sistema físico no son sólo idénticos, sino indistinguibles. Esta suposición es claramente incorrecta al considerar sistemas sociales. No sólo la red de interacciones es distinta de un agente a otro (algo ya bien establecido y estudiado en la literatura) sino que los propios agentes han de ser considerados distintos. A nuestro entender, esto es algo que todavía no se ha tenido en cuen-

ta en toda la consideración que requiere. Desde luego esta diversidad aparece también en otras aplicaciones recientes de la física estadística. Piénsese, por ejemplo, en el fenómeno de sincronización. El pionero trabajo de Kuramoto [16] sobre sincronización de osciladores incorpora el que cada oscilador pueda tener una frecuencia distinta. Si estudiamos la sincronización de la actividad neuronal, es obvio que no todas las neuronas son iguales: tienen diferente forma y volumen, diferente número de dendritas, diferentes potencial de acción, etc. De hecho, hay toda una variedad de ecuaciones adecuadas para describir la actividad de tal o cual neurona. Desde un punto de vista físico, se puede modelar la diversidad utilizando las mismas ecuaciones dinámicas y variando los parámetros intrínsecos de cada constituyente (caso de las frecuencias en el modelo de Kuramoto), variando la red de conectividades (aceptando que algunos sistemas están más conectados que otros) o, incluso, tomando diferentes ecuaciones para la dinámica de cada uno de los sistemas, la llamada diversidad estructural (por ejemplo, mezclando osciladores lineales y no lineales). Obviamente, lo más sencillo es tomar las mismas ecuaciones para cada sistema, una red regular de conectividades y variar de sistema en sistema un parámetro de las ecuaciones. Esto es lo que se denomina el *ruido congelado*. Aunque no podamos detallar cuál es el efecto de un término de ruido congelado en las ecuaciones, sí podemos comprender intuitivamente que lo que hace es aumentar las fluctuaciones y, por tanto, disminuir la homogeneidad del sistema en su conjunto. Retomemos nuestro sencillo modelo (2) de resonancia estocástica y consideremos ahora que tenemos muchas unidades biestables acopladas, pero cada una de las unidades tiene una preferencia distinta por cada uno de los dos estados, ±1. Esto se consigue añadiendo un término constante de la forma: $\dot{x}_i(t) = x_i - x_i^3 + a_i$. Si el parámetro $a_i > 0$ hay una preferencia por el estado estable de valor positivo (no está situado ahora exactamente en $x_i = +1$) y, similarmente, si $a_i < 0$ hay una preferencia por el estado estable de valor negativo. Si acoplamos ahora N de estas unidades por un simple acoplamiento global de intensidad C que tiende a homogeneizar los valores de todas las variables, el modelo dinámico pasa a ser

$$\dot{x}_i = x_i - x_i^3 + a_i + \frac{C}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - x_i) + A\sin(\Omega t). \qquad (4)$$

donde no es necesario añadir términos explícitos de ruido $\xi_i(t)$. Para ser más concretos, los parámetros a_i se generan de una distribución gaussiana de media 0 y varianza σ^2. La desviación típica σ es una medida de la *diversidad* de la población. Si $\sigma = 0$, la población es completamente homogénea y, debido al término de acoplamiento y en ausencia de forzamiento, todos los sistemas alcanzan durante la evolución dinámica el mismo estado estable. Si el forzamiento es suficientemente débil, no puede hacer que las unidades salten de un estado a otro y la variable colectiva $x(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ sencillamente oscila alrededor del punto estable determinado por la condiciones iniciales (supongamos que es +1) con una pequeña amplitud proporcional a A. A medida que σ aumenta habrá una fracción de las unidades (aquellas que tengan un valor grande y negativo de a_i), para las cuales el forzamiento externo, cuando toma valores negativos, es ahora suficiente para hacerlas saltar al punto estable −1. Si el acoplamiento es suficientemente grande, esas unidades "estirarán" de las otras haciéndolas adoptar también el valor −1, de manera que eventualmente una fracción mayoritaria de unidades haya pasado de +1 a −1. Cuando en el próximo semiperiodo, el forzamiento favorezca a aquellas unidades que tienen un valor de a_i suficientemente grande y positivo, entonces una fracción mayoritaria saltará de −1 a +1, obteniéndose así una sincronización óptima con el forzamiento externo. Éste es, en pocas palabras, el mecanismo de resonancia inducida por diversidad presentado en [28].

Volvamos ahora a nuestro modelo de formación de opinión e introduzcamos la diversidad en la forma de una preferencia individualizada: cada persona, independientemente de la opción que adopte en un momento dado, tiene una preferencia intrínseca por una de las dos opciones. Denominamos $\theta_i \in (-1,1)$ a la preferencia de la persona *i*. Si $\theta_i > 0$ quiere decir que esa persona prefiere la opción +1. Cuanto mayor sea θ_i mayor será la preferencia por esa opción, y similarmente para opción −1 con $\theta_i < 0$. Modificamos ahora la regla de evolución de tal manera que la presión ejercida por el entorno o por la publicidad tiene que ser suficientemente fuerte como para hacerme ir en contra de mi preferencia. Concretamente, la regla de interacción entre vecinos pasa a ser:

$$s_i(t+\delta t) = \text{signo}\left[\frac{1}{k_i}\sum_{j\in n(i)} s_j(t) + \theta_i\right] \qquad (3'')$$

siendo k_i el número de vecinos con los que el agente *i* debate. Por ejemplo, si θ_i=0.3, es necesario que la fracción de vecinos que apoyan la opción −1 sea mayor del 70% para hacer cambiar de opinión a la persona *i*. Nos gusta ejemplificar esta regla con las preferencias sobre bebidas. Si las opciones son beber cerveza o vino, uno ciertamente tiene una preferencia mayor o menor por una de esas opciones. Si mi preferencia es vino, pero la gran mayoría de asistentes a una cena piden cerveza, yo puedo decidir tomar cerveza aunque no sea mi opción preferida. Similarmente, la regla de interacción con el forzamiento externo se modifica a:

$$\text{Con probabilidad } |A\sin(\Omega t)|,$$
$$\text{adoptar } s_i(t+\delta t) = \text{signo}\,[\sin(\Omega t) + \theta_i]. \qquad (4'')$$

Y ya no necesitamos incluir el elemento estocástico explícito de (5). Aunque es posible hacer todas las cuentas necesarias [30], es claro que tenemos todos los ingredientes necesarios para que haya una resonancia en función de la diversidad σ. La respuesta colectiva es máxima para un valor intermedio de σ, ni demasiado alto, ni demasiado bajo. Véase que este mecanismo ofrece una posible interpretación de la penetración de una nueva idea en una sociedad. Si la sociedad es muy homogénea es muy difícil que una nueva idea contraria a la ya dominante se propague. Sin embargo, si la sociedad no es completamente homogénea, cuando la nueva opción intenta imponerse (forzamiento) empieza por convencer a aquellos que, aunque estuvieran tomando la opción contraria, no estaban satisfechos pues actuaban en contra de su preferencia. Debido a las interacciones, estos agentes que han tomado partido por la nueva opción son capaces de arrastrar una fracción significativa de otros agentes, de manera que, eventualmente, una fracción macroscópica ha sido convencida a la nueva opción. Existe hoy en día un gran número de situaciones en diversas disciplinas en las que se ha identificado la relevancia de este mecanismo de resonancia inducida por diversidad, y queremos destacar, dentro de las ciencias sociales, la reciente publicación [31] sobre la emergencia de la cooperación en un modelo puramente económico de agentes cooperadores y desertores.

En resumen, aunque únicamente hemos podido dar unas pinceladas en algunos temas muy concretos, esperamos haber convencido al lector de que hay muchos problemas interesantes en la dinámica de opinión y consenso de poblaciones para los que uno puede usar las técnicas de modelización y análisis propias de la física estadística.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo financiero de MINECO y FEDER (EC) bajo el proyecto FIS2012-30634, y de la Comunitat Autònoma de les Illes Balears. El trabajo explicado aquí ha sido desarrollado en gran medida con la imprescindible aportación de mis colaboradores Emilio Hernández-García, Miguel Pineda, Claudio J. Tessone y Teresa Vaz Martins, entre otros.

Referencias

[1] G. Deffuant, D. Neu, F. Amblard y G. Weisbuch, *Adv. Complex Syst.* 3, 87 (2000).

[2] G. Weisbuch, G. Deffuant, F. Amblard y J. P. Nadal, *Complexity* 7, 855 (2002).

[3] R. Hegselmann y U. Krause, *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 5, 2 (2002).

[4] S. Ares, J. Cuesta, A. Sánchez y R. Toral, *Phys. Rev. E* **67**, 046108 (2003).

[5] R. Benzi, A. Sutera y A. Vulpiani, *J. Phys. A* **14**, 453 (1981).

[6] C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo y R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3395 (1994).

[7] C. Castellano, S. Fortunato y V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).

[8] B. Chopard, M. Droz y S. Galam, *Eur. Phys. J. B* **16**, 575 (2000).

[9] S. Galam, B. Chopard, M. Droz, *Physica A* **314,** 256 (2002).

[10] S. Galam, *Eur. Phys. J. B* **25**, 403 (2002).

[11] S. Galam, *Physica A* **320**, 571 (2003).

[12] S. Galam, *Physica A* **333**, 453 (2004).

[13] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung y F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).

[14] J. García-Ojalvo y J. M. Sancho, *Noise in spatially extended systems* (Springer, 1999).

[15] M. Granovetter, *American J. Sociology* **83**, 1420 (1978).

[16] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, 1984).

[17] M. Kuperman y D. Zanette, *Eur. Phys. J. B* **26**, 387 (2002).

[18] C. Nicolis y G. Nicolis, *Tellus* **33**, 225 (1981).

[19] A. Pikovsky, A. Zaikin, M. A. de la Casa, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 050601 (2002).

[20] M. Pineda, R. Toral y E. Hernández-García, *J. Stat. Mech.* **P08001** (2009).

[21] M. Pineda, R. Toral y E. Hernández-García, *Eur. Phys. J. D* **62** 109 (2011).

[22] M. Pineda, R. Toral y E. Hernández-García, *Eur. Phys. J. B* **86**, 490 (2013).

[23] T. C. Schelling, *J. Math. Sociology* **1**, 143 (1971); *Micromotives and Macrobehavior* (Norton and Co., New York, 1978).

[24] D. Stauffer, *Int. J. Mod. Phys. C* **13**, 975 (2002).

[25] D. Stauffer y S. A. Sá Martins, *Physica A* **334**, 558 (2004).

[26] C. J. Tessone, R. Toral, P. Amengual, H. S. Wio y M. San Miguel, *Eur. Phys. J. B* **39** 535 (2004).

[27] C. J. Tessone y R. Toral, *Physica A* **351**, 106 (2005)

[28] C. J. Tessone, C. R. Mirasso, R. Toral y J. D. Gunton, *Phys. Rev. Lett.* **97** 194101 (2006).

[29] R. Toral y C. Tessone, *Comm. Comp. Phys.* **2**, 177 (2007).

[30] C. J. Tessone y R. Toral, *Eur. Phys. J. B* **71** 549 (2009).

[31] C. J. Tessone, A. Sánchez y F. Schweitzer, *Phys. Rev. E* **87**, 022803 (2013).

[32] R. Toral, *Revista Española de Física* **16**(1), 62-65; **16**(2), 58-59; **16**(3), 60-62 (2002).

[33] R. Toral, C. Mirasso y J. D. Gunton, *Europhys. Lett.* **61**, 162 (2003).

[34] Este modelo en particular se estudió en T. Vaz Martins, R. Toral, *Applications of Nonlinear Dynamics*, V. In *et al.* (eds.), *Understanding Complex Systems series,* 439 (Springer, 2009). Un modelo relacionado con variables continuas de opinión es: T. Vaz Martins, M. Pineda, R. Toral, *Europhys. Lett.* **91**, 48003 (2010).

Raúl Toral
IFISC (Instituto de Fisica Interdisciplinar y Sistemas Complejos), Universidad de Baleares-CSIC